

Olaf Strelow

Fernwärmenetze -
Effektive Berechnung der Druck- und Temperatur-
profile

THM-Hochschulschriften Band 35

Olaf Strelow

Fernwärmenetze -
Effektive Berechnung der Druck- und
Temperaturprofile

THM-Hochschulschriften Band 35

THM-Hochschulschriften Band 35

©2025 Olaf Strelow

Technische Hochschule Mittelhessen

Fachbereich Maschinenbau und Energietechnik

Herausgeber der THM-Hochschulschriften:

Der Präsident der Technischen Hochschule Mittelhessen

Alle Rechte vorbehalten, Nachdruck, auch auszugsweise, nur
mit schriftlicher Genehmigung und Quellenangabe.

Die Hochschulschriften sind online abrufbar:

www.thm.de/bibliothek/thm-hochschulschriften

ISSN (Print) 2568-0846

ISSN (Online) 2568-3020

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Strömungswiderstand und Strömungsformen in Rohrleitungen	5
2.1	Berechnung des Druckverlustes	6
2.2	Strömungsformen	7
2.2.1	Laminare Strömung	7
2.2.2	Kriechströmung	7
2.2.3	Turbulente Strömung	8
2.3	Bestimmung der Grenzen zwischen den Strömungsformen	8
3	Druckprofil und Massestromverteilung in Fernwärmenetzen	9
3.1	Allgemeine Netzeigenschaften	9
3.1.1	Knotensatz	11
3.1.2	Maschensatz	12
3.1.3	Widerstandssatz	13
3.2	Hydraulische Berechnung von Fernwärmenetzen	14
3.2.1	Strangnetze	14
3.2.2	Gering vermaschte Netze	15
3.2.3	Stark vermaschte Netze	17
3.2.4	Ermittlung des statischen Druckprofils	18
4	Thermisches Netzprofil - Wärmeverluste eines Fernwärmenetzes	19
4.1	Thermische Berechnung einer Rohrleitung	19
4.2	Temperaturvermischung in Netzknoten	19
4.3	Stationäre Temperaturprofile	20
4.4	Dynamische Temperaturprofile	22
5	Berechnungsbeispiele	27
5.1	Netzanalyse	27
5.2	Strangnetz	33
5.3	Gering vermaschtes Netz	35
5.4	Stark vermaschtes Netz	40
5.5	Ermittlung des statischen Druckprofils	45
5.6	Stationäres und instationäres Temperaturprofil	46
6	Zusammenfassung	48
7	Formelzeichen	49
7.1	Skalare	49
7.2	Vektoren	50
7.3	Matrizen	50
7.4	Indizes	50
8	Literatur	51

Fernwärmenetze - Effektive Berechnung der Druck- und Temperaturprofile

Prof. Dr.-Ing. O. Strelow, Dipl. Ing.(FH) B. Kouka

Technische Hochschule Mittelhessen - FB Maschinenbau u. Energietechnik
Institut für Thermodynamik, Energieverfahrenstechnik u. Systemanalyse

St. Tönis, 21.05.2025

1 Einleitung

Aufgrund der geographischen Lage Mitteleuropas ist während der kalten Jahreszeit die Beheizung von Gebäuden erforderlich. Zur effektiven Wärmeversorgung dicht besiedelter urban sowie industriell geprägter Gebiete sind Wärmenetze unverzichtbares Element der Infrastruktur. Wärmenetze transportieren thermische Energie von zentralen Heizwerken über räumliche Distanzen zu zahlreichen Endkunden. Von Vorteil ist der positive Einfluss auf die Luftqualität in Wohngebieten sowie die Möglichkeit industrielle Abwärme (statt in Kühltürme) in Wärmenetze einzuspeisen und somit sinnvoll zu nutzen.

Der Transport von thermischer Energie in Wärmenetzen erfolgt per Wärmeträger. Meist ist dies unter Druck stehendes Wasser, welches mit hoher Temperatur z.B. 125°C in das Vorlaufnetz eingespeist und aus dem Rücklaufnetz idealerweise mit etwa 35°C entnommen, erneut erwärmt und wieder ins Vorlaufnetz gespeist wird. Aus betriebswirtschaftlicher Sicht treten dabei gegensätzliche Tendenzen auf. Beispielsweise verringert eine erhöhte Vorlauftemperatur einerseits die zu fördernde Wassermenge, verursacht andererseits höhere thermische Verluste an die Umgebung. Dies zeigt: Den Kosten für den elektrischen Betrieb von Pumpen stehen die Kosten zur thermischen Isolation von Rohrleitungen gegenüber. Weitere wirtschaftliche Zusammenhänge betreffen die Wahl der Rohrdurchmesser, die Lastverteilung usw. Projektanten und Betreibern von Wärmenetzen sind diese Zusammenhänge bekannt, allerdings erfordert deren Berücksichtigung Software mit adäquaten mathematisch-physikalischen Modellen [1, 2].

Wärmenetze unterliegen starken meteorologisch bedingten Lastschwankungen, so dass „**der Auslegungspunkt**“ zwangsläufig nur in seltenen Ausnahmen vorliegt. Deshalb werden Netze meist gemäß standortspezifischer Erfahrungen betrieben, welche durch Analyse des hydraulischen und thermischen Verhaltens von Wärmenetzen bei unterschiedlichen meteorologischen Situationen erhalten werden. Dies erfordert für Betrieb und Planung eine hohe Anzahl von Variantenrechnungen.

Derzeit existieren für die Berechnung von Fernwärmenetzen viele kommerzielle, meist ausgereifte Softwarelösungen. Nachteil vieler Programmsysteme ist, dass es sich um „Black-boxes“ handelt, welche zwar Schnittstellen zu anderer Software aufweisen, aber oft nicht in übergeordnete Softwaresysteme (z.B. Optimierung der thermischen Lastverteilung) integrierbar sind.

Der vorliegende Artikel stellt einfache Modelle zur Berechnung der Druck- und Temperaturprofile von Wärmenetzen unterschiedlichster Struktur vor. Die Programmierung der Modelle erfordert Standardsoftware kombiniert mit ingenieurtechnischem Verständnis. Oberflächlich gesehen wird das „Fahrrad noch einmal erfunden“, jedoch entsteht ein vertieftes Verständnis der physikalischen Eigenschaften eines Wärmenetzes sowie ein zuverlässiges Simulationswerkzeug.

2 Strömungswiderstand und Strömungsformen in Rohrleitungen

Die Strömung in Rohrleitungen weist in Abhängigkeit von Massenstrom, Viskosität und geometrischen Größen eine laminare oder turbulente Form auf. Zwischen beiden Strömungs-

formen liegt ein unscharfer Übergangsbereich. Um die Eindeutigkeit bei der Berechnung der Rohrreibungszahl zu gewährleisten, wird ein pragmatischer eindeutiger Ansatz vorgeschlagen, welcher rechnerisch den „nahtlosen“ Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung gewährleistet.

2.1 Berechnung des Druckverlustes

Ein Wärmenetz umfasst Rohrleitungen, Verteiler und Förderpumpen, welche thermische Energie mit dem Wärmeträger Wasser von Erzeugern zu den Anwendern führen. Die Rohrleitungen verursachen beim strömenden Wärmeträger reibungsbedingte Druckabfälle, welche mit Förderpumpen kompensiert werden. Der Druckabfall in einer Rohrleitung hängt von konstruktiven Größen (Länge, Durchmesser, Wandrauigkeit), technologischen Größen (Massestrom bzw. Strömungsgeschwindigkeit) sowie temperaturabhängigen Stoffdaten (Dichte, Viskosität) ab. Für den Druckabfall einer Rohrleitung gilt Gleichung (1). Der Term $-|w|w$ beschreibt die Tatsache, dass Druckgradient und Fließrichtung gegenläufig sind und bei Änderung der Fließrichtung ein Vorzeichenwechsel erfolgt. In Analogie zum Ohm'schen Gesetz wird der Strömungswiderstand R definiert

$$\Delta p = -\lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} |w|w = -\lambda \frac{l}{d} \frac{|\dot{m}| \dot{m}}{2\rho F^2} = -R \dot{m} \quad \text{mit} \quad R = \lambda \frac{l}{d} \frac{|\dot{m}|}{2\rho F^2} \quad (1)$$

Die Rohrreibungszahl λ hängt von der Strömungsform, d.h. von Reynoldszahl Re und relativer Rauigkeit k ab.

$$\lambda = \lambda(Re, k) \quad (2)$$

Für die Reynoldszahl Re als Verhältnis von Massenträgheit zu innerer Reibung und der relativen Rauigkeit als Verhältnis von Rauhtiefe r zum Rohrdurchmesser d gilt

$$Re = \frac{w\rho d}{\eta} = \frac{\dot{m}d}{F\eta} \quad \text{und} \quad k = \frac{r}{d} \quad (3)$$

Die Grundgleichung (1) ist offensichtlich nichtlinear. Die Ermittlung des Druckprofils im Netz stellt bei gegebenen Masseströmen kein Problem dar. Dies ist aber nur bei Strangnetzen der Fall. Sind Rohrleitungsmaschen vorhanden, hängen Druckprofil und Massestromverteilung nichtlinear voneinander ab und erfordern eine iterative Berechnung. Die Lösung derartiger Gleichungen geschieht per Newton-Verfahren. Die benötigte Jacobi-Matrix erfordert die 1. Ableitung des Druckverlustes nach dem Massenstrom. Die Ableitung von Gleichung (1) lautet

$$\frac{d\Delta p}{d\dot{m}} = - \left(2 + \frac{Re}{\lambda} \frac{d\lambda}{dRe} \right) R \quad (4)$$

Der Ableitungsfaktor a ermöglicht die schnelle Generierung der Jacobi-Matrix, indem Ableitungen nicht numerisch angenähert, sondern mit weniger Rechenaufwand mathematisch exakt berechenbar sind

$$a = 2 + \frac{Re}{\lambda} \frac{d\lambda}{dRe} \quad (5)$$

Die Berücksichtigung des Terms $\frac{d\lambda}{dRe}$ bewirkt darüber hinaus eine deutlich beschleunigte Konvergenz.

2.2 Strömungsformen

Strömungswiderstände von Rohrleitungen und Armaturen hängen nicht nur quantitativ von der Strömungsgeschwindigkeit, sondern auch qualitativ von der Strömungsform ab. Über die Berechnung von Reynoldszahl Re und Rohrreibungszahl λ erfolgt die Unterscheidung von laminarer und turbulenter Strömung.

2.2.1 Laminare Strömung

Bei laminarer Strömung liegen gerade parallele Strömungslinien vor, welche über den Strömungsquerschnitt ein parabelförmiges Geschwindigkeitsprofil aufweisen. Laminare Strömungsverhältnisse in Rohrleitungen sind physikalisch exakt modellierbar. Für diese Strömungsform existiert eine analytische Lösung, welche die Beziehung für die Rohrreibungszahl λ_{lam} enthält.

Bei laminarer Strömung liegen gerade parallele Strömungslinien vor, welche über den Strömungsquerschnitt ein p

$$\lambda_{lam} = \frac{64}{Re} \quad (6)$$

Der Ableitungsfaktor der laminaren Strömung a_{lam} ergibt

$$a_{lam} = 2 + \frac{d\lambda_{lam}}{dRe} \frac{Re}{\lambda_{lam}} = 2 - \frac{64}{Re^2} \frac{Re^2}{64} = 1 \quad (7)$$

Der Ableitungsfaktor $a_{lam} = 1$ bestätigt den linearen Zusammenhang zwischen Druckverlust und Massenstrom bei laminarer Strömung.

2.2.2 Kriechströmung

Die Kriechströmung ist ein Sonderfall der laminaren Strömung, kurz bevor die Strömung in der Rohrleitung zum Stillstand kommt d.h. $w \rightarrow 0$. In diesem Fall liefert Gleichung (6) infolge Nulldivision unbestimmte Werte, welche den Computer „abstürzen“ lassen. Es ist günstig im Bereich $Re < 1$ mit einer linearen Ersatzfunktion zu rechnen. Am Ort der Linearisierung $Re_{lin} = 1$ gilt

$$\lambda_{Re<1} = \lambda_{Re=1} + \left(\frac{d\lambda}{dRe} \right)_{Re=1} (Re - Re_{lin}) = 128 - 64 Re \quad (8)$$

Der Ableitungsfaktor a_{lam} für den Bereich $Re < 1$ lautet

$$a_{Re<1} = 2 + \frac{d\lambda}{dRe} \frac{Re}{\lambda} = 2 - \frac{Re}{2 - Re} \quad (9)$$

Am Punkt der Linearisierung $Re = 1$ gilt für den Ableitungsfaktor $a_{Re=1} = 1$. Damit besteht ein „nahtloser, glatter“ d.h. stetiger Anschluss zum laminaren Bereich.

2.2.3 Turbulente Strömung

Mit steigender Reynoldszahl geht die Ordnung der laminaren Strömung ins Chaos der turbulenten Strömung über. Dies ist für makroskopische Berechnungen unerheblich, da das Chaos stabile Mittelwerte bezüglich Energie und Impuls aufweist.

Ansätze verschiedener Autoren beschreiben die Rohrreibungzahl λ_{trb} für turbulente Rohrströmung. Die nachfolgende, sehr häufig genutzte Beziehung (10) umfaßt die meisten Ansätze mit guter Näherung

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{trb}}} = \frac{-2}{\ln 10} \ln \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda_{trb}}} + 0.269 \cdot \frac{k}{d} \right) \quad (10)$$

Diese Gleichung (10) ist transzendent und somit nur numerisch lösbar. Mit dem Newton-Verfahren wird diese Gleichung in eine schnell zu lösende rekursive Beziehung überführt. Diese Beziehung (11) ist mit dem Startwert $x_0 = \sqrt{\lambda_0} = 1.0$ nach 4 bis 5 Rekursionen stets zielführend

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{\frac{2.51}{Re} + \frac{\ln 10}{2} \left(\frac{2.51}{Re \cdot x_n} + 0.269 \cdot \frac{k}{d} \right)}{\frac{2.51}{Re \cdot x_n} - \left(\frac{2.51}{Re \cdot x_n} + 0.269 \cdot \frac{k}{d} \right) \ln \left(\frac{2.51}{Re \cdot x_n} + 0.269 \cdot \frac{k}{d} \right)} \\ \lambda_{trb} &= x^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Der Ableitungsfaktor a_{trb} für den turbulenten Bereich ergibt sich zu

$$a_{trb} = 2 + \frac{d\lambda_{trb}}{dRe} \frac{Re}{\lambda_{trb}} = 2 - \frac{10.04 \cdot \sqrt{\lambda_{trb}}}{5.02 \cdot \sqrt{\lambda_{trb}} + \ln 10 \left(2.51 + \frac{k}{d} \cdot 0.269 \cdot Re \cdot \sqrt{\lambda_{trb}} \right)} \quad (12)$$

Die obigen Gleichungen erscheinen u.U. etwas kompliziert. Zur Vereinfachung ist es günstig mehrfach auftretende Terme zu separieren und vorab gesondert zu berechnen.

2.3 Bestimmung der Grenzen zwischen den Strömungsformen

Mit zunehmender Reynoldszahl erfährt die Strömung in Rohrleitungen eine Änderung von der laminar geordneten zur turbulent chaotischen Form. Dieser Übergang verläuft nicht streng determiniert, sondern weist Phasen physikalischer Unbestimmtheit auf. Derartige unscharf abgrenzbare Mehrdeutigkeiten sind mit Berechnungsalgorithmen kaum darstellbar.

Zur eindeutigen Festlegung der Grenze zwischen laminarer und turbulenter Strömung wird ein pragmatisches Kriterium vorgeschlagen. Die Grenze zwischen laminarem und turbulentem Gebiet liegt stets bei Gleichheit der jeweiligen Rohrreibungzahlen.

$$\lambda_{lam} = \frac{64}{Re^*} = \lambda_{trb}(Re^*, k) \quad (13)$$

Die Abbildung 1 zeigt die Unterscheidung zwischen laminarem und turbulentem Bereich. Hiernach liegt eine laminare Strömung vor, wenn die Bedingung $\lambda_{lam} > \lambda_{trb}$ erfüllt ist,

anderenfalls bei $\lambda_{trb} > \lambda_{lam}$ ist die Strömung turbulent.

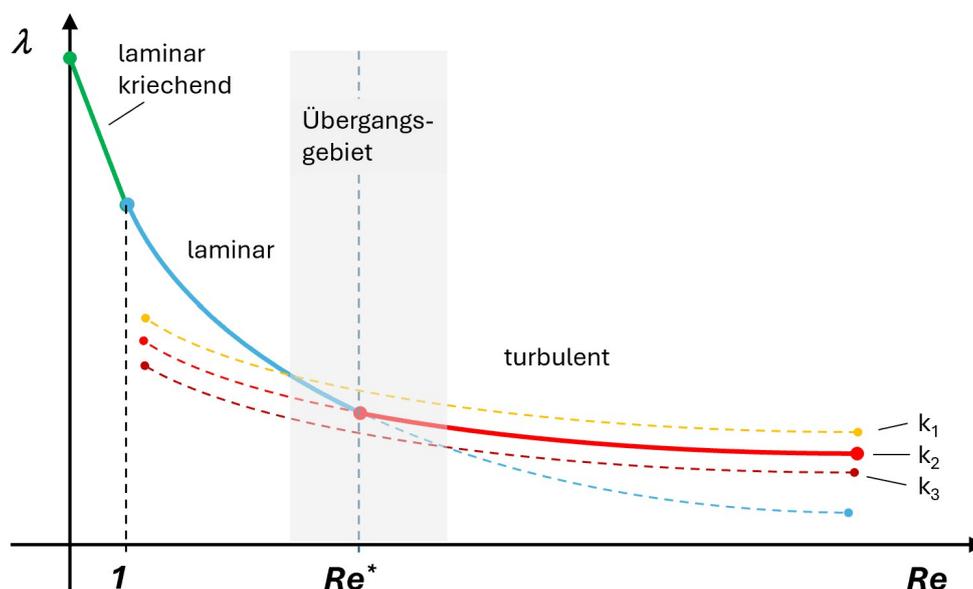


Abbildung 1: Schematisch vereinfachte Darstellung des Moody-Diagramms

Das Moody-Diagramm verfügt i.a. über logarithmisch geteilte Achsen für die Rohrreib- und die Reynoldszahl. Das modifizierte Moody-Diagramm gemäß Abbildung 1 ist ein qualitatives Schema mit linear geteilten Achsen, welches drei unterschiedliche Bereiche für Strömungsformen in Rohrleitungen zeigt. Im Intervall $0 \leq Re \leq 1$ liegt die lineare Ersatzfunktion der Kriechströmung, deren Steigung mit jener der laminaren Hyperbelfunktion gemäß Gleichung (6) an der Stelle $Re = 1$ übereinstimmt. Nur der Anstieg der Rohrreibungszahl λ weist beim Übergang vom laminaren zum turbulenten Bereich infolge der Überlagerung von zwei Funktionen eine Unstetigkeit in Form eines leichten Knickes auf. Hieraus entstehen keine negativen Folgen für übergeordnete Iterationen.

3 Druckprofil und Massestromverteilung in Fernwärmenetzen

3.1 Allgemeine Netzeigenschaften

Technische Netze umfassen eine Anzahl Knoten mit verbindenden Leitungen. Mehrere Leitungen können geschlossene Maschen bilden. Für n Netze mit insgesamt k Knoten und l verbindenden Leitungen existieren gemäß nachfolgender Beziehung genau m Maschen.

$$m = l - k + n \quad (14)$$

Anhand der Knotenzahl k und der Maschenzahl m sind drei Typen von technischen Netzen unterscheidbar, für welche jeweils unterschiedliche Methoden zur effektivsten Berechnung führen [3].

Drei Typen technischer Netze, insbesondere Fernwärmenetze

1. Strangnetz (ohne Maschen) $m = 0$
Die Berechnungen der Massenstromverteilung sowie die Profile von Druck und Temperatur erfordern keine Iterationen und sind mit relativ geringem mathematischen Aufwand durchführbar.
2. Gering vermaschtes Netz $m < k$
Die Ermittlung der Massenstromverteilung erfordert die iterative Lösung eines Systems mit m nichtlinearen Gleichungen. Die Bestimmung der Druck- und Temperaturprofile erfolgt ohne Iteration.
3. Stark vermaschtes Netz $m > k - 1$
Die Bestimmung der Massenstromverteilung und des Druckprofils erfordert die iterative Lösung eines Systems mit $k - 1$ nichtlinearen Gleichungen. Die Ermittlung des Temperaturprofils erfolgt iterationslos.

Die wichtigste Eigenschaft von Netzen ist deren topologische Struktur, d.h. der konkrete Anschluss der Enden involvierter Leitungen an die jeweiligen Knoten. Eine hervorragende Möglichkeit der mathematischen Beschreibung von Netzstrukturen ist die Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$. Das Netz ($n = 1$) gemäß Abbildung 2 verfügt über $k = 4$ Knoten, $l = 5$ verbindende Leitungen und somit $m = l + n - k = 2$ Maschen.

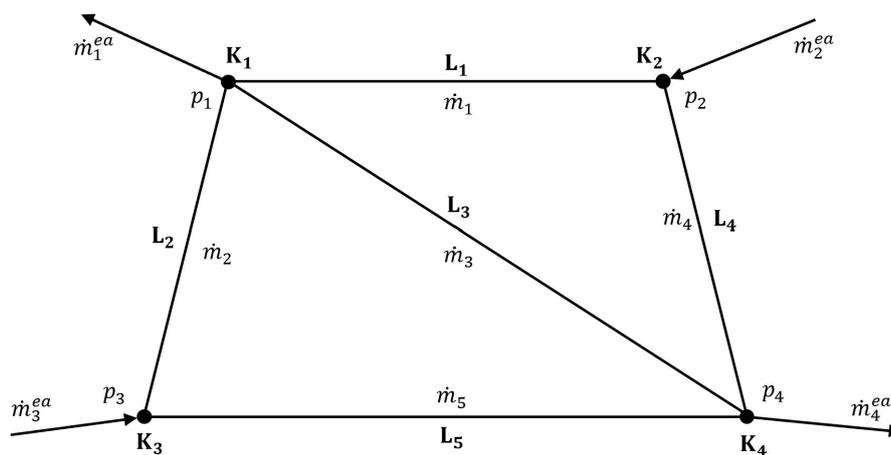


Abbildung 2: Netzwerk mit vier Knoten und fünf verbindenden Leitungen

Ein Netz mit k Knoten und l Rohrleitungen benötigt zur Beschreibung seiner Struktur eine Kopplungsmatrix mit k Zeilen und l Spalten. Das Prinzip des Aufbaus der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ basiert auf der Identität der Ordinalzahlen von Zeilen und Knoten sowie jener von Spalten und Leitungen. Jede Spalte j enthält zwei von Null verschiedene Werte. In der e -ten Zeile steht „ -1 “ und in der a -ten Zeile „ $+1$ “ d.h. der j -te Massestrom tritt am Knoten „ e “ in die Rohrleitung j ein und am Knoten „ a “ aus. Für das Netz gemäß Abbildung 2 gilt

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Die Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ ermöglicht allgemeine mathematische Formulierungen von physikalischen Zusammenhängen in Netzwerken, wie den Knotensatz für extensive und den Maschensatz für intensive Größen. Den Zusammenhang zwischen intensiven und extensiven physikalischen Größen beschreibt das Widerstandsgesetz [4, 5].

3.1.1 Knotensatz

Der Knotensatz formuliert stationäre Massenbilanzen um die Knoten eines Rohrleitungsnetzes. Die Aussage stationärer Massenbilanzen: Die Summe sämtlicher Ein- und Austrittsmassenströme eines Knotens ist Null. Für ein Netz mit k Knoten existieren somit k Bilanzgleichungen. Es ist günstig diese Gleichungen als System mit Matrizen und Vektoren in allgemeiner Form darzustellen.

Jede Zeile des Gleichungssystems (16) formuliert die Massenbilanz des jeweiligen Knotens. Der Term $\underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\dot{\mathbf{m}}}$ enthält die inneren Masseströme, der Term $\underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\dot{\mathbf{m}}}^{ea}$ die äußeren in das Netz ein- und austretenden Masseströme.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_1^{ea} \\ \dot{m}_2^{ea} \\ \dot{m}_3^{ea} \\ \dot{m}_4^{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\dot{\mathbf{m}}} + \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\dot{\mathbf{m}}}^{ea} = \underline{\mathbf{0}}$$

In der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ wird von links beginnend eine Einheitsmatrix entwickelt. Hierzu sind die Zeilen der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ sowie der Einheitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ in zielführender Weise zu addieren bzw. zu subtrahieren. Im Allgemeinen sind dazu Vertauschungen von Zeilen und Spalten in beiden Matrizen sowie von Elementen der betreffenden Vektoren erforderlich. Die am Schluss entstandene Nullzeile der modifizierten Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ bestätigt deren Rang $r = k - 1$. Die ursprüngliche Einheitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ ändert ebenfalls die Gestalt.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{m}_1^{ea} \\ \dot{m}_2^{ea} \\ \dot{m}_3^{ea} \\ \dot{m}_4^{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{\mathbf{E}}} & \underline{\underline{\mathbf{U}}} \\ \hline \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{\dot{\mathbf{m}}}_a \\ \underline{\dot{\mathbf{m}}}_u \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{\mathbf{I}}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \hline \underline{\underline{\mathbf{B}}} & \underline{\underline{\mathbf{E}}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{\dot{\mathbf{m}}}_u^{ea} \\ \underline{\dot{\mathbf{m}}}_a^{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix}$$

Die modifizierte Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ weist wie die modifizierte Einheitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ jeweils vier Untermatrizen auf. Neben Null- und Einheitsmatrizen ($\underline{\mathbf{0}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$) sind dies die Unabhängigkeitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$, die Inverse $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ und die Bilanzmatrix $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$. Diese Matrizen beinhalten wichtige Eigenschaften des Netzes, deren Bedeutung an nachfolgenden Beispielen demonstriert wird.

Das Gleichungssystem (17) gestattet bei Vorgabe von $u = l - k + n = 2$ unabhängigen Variablen (\dot{m}_4 und \dot{m}_5) mit Inverser $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ und Unabhängigkeitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ die Bestimmung von $r = 3$ abhängigen Variablen (\dot{m}_1, \dot{m}_2 und \dot{m}_3). Dieses Prinzip reduziert die Zahl iterativ zu lösender Gleichungen bei gering vermaschten Netzen beträchtlich.

Die letzte Zeile des modifizierten Gleichungssystems drückt mit den Untermatrizen $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ die Gesamtbilanz des Netzes aus.

3.1.2 Maschensatz

Gemäß Maschensatz ist die Summe der Druckdifferenzen zwischen den Knoten entlang einer geschlossenen Leitungsmasche gleich Null. Dabei ist der topologisch gleichsinnige Durchlauf innerhalb einer Leitungsmasche erforderlich! Diese Bedingung ist bei Verwendung von Kopplungsmatrizen und der damit verbundenen willkürlichen Festlegung von Ein- und Ausgängen der Leitungen kaum einhaltbar. Interessanterweise ist dieses Prinzip nicht zwingend, da die Vorzeichen der Druckdifferenzen bei Strömungsumkehr ebenfalls wechseln.

Die Formulierung des Maschensatzes erfordert die transponierte Form der Kopplungsmatrix. Gleichung (18) beschreibt somit den Zusammenhang zwischen dem Druck in den Netzknoten und der Druckdifferenz entlang der Leitungen. Der Maschensatz wird durch die nachfolgende Modifikation des Gleichungssystems „sichtbar“.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta p_3 \\ \Delta p_4 \\ \Delta p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2 - p_1 \\ p_3 - p_1 \\ p_4 - p_1 \\ p_4 - p_2 \\ p_4 - p_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \quad \underline{\underline{\mathbf{p}}} \quad = \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad \underline{\underline{\Delta \mathbf{p}}} \tag{18}$$

Analog zum Knotensatz erfolgt die Bestimmung des Ranges der transponierten Kopplungsmatrix, indem eine linksseitige Einheitsmatrix in der Transponierten $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^T$ entsteht. Die optionale Einheitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ der rechten Gleichungsseite zeigt am Schluss des Verfahrens ebenfalls Netzeigenschaften auf.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta p_3 \\ \Delta p_4 \\ \Delta p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta p_3 \\ \Delta p_1 - \Delta p_3 \\ \Delta p_2 - \Delta p_3 \\ \hline \Delta p_1 - \Delta p_3 + \Delta p_4 \\ \Delta p_2 - \Delta p_3 + \Delta p_5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{\mathbf{E}}} & -\underline{\underline{\mathbf{B}}}^T \\ \hline \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{p}}}_a \\ \underline{\underline{\mathbf{p}}}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{I}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ -\underline{\underline{\mathbf{U}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{E}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Delta \mathbf{p}}}_a \\ \underline{\underline{\Delta \mathbf{p}}}_u \end{bmatrix} \tag{19}$$

Der Rang der transponierten Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^T$ wird mit $r = k - 1$ bestätigt. Die unteren Zeilen mit den Nullen in der Kopplungsmatrix, weisen in der modifizierten Einheitsmatrix Maschen aus. Die erste Masche (Zeile 4) besteht aus den Leitungen L_1, L_3 und L_4 . Die

zweite Masche (Zeile 5) involviert die Leitungen L_2 , L_3 und L_5 . Dies entspricht genau der Abbildung 2.

Die Struktur von transponierter Kopplungsmatrix und Einheitsmatrix nach der Modifikation besteht ebenfalls aus jeweils vier Untermatrizen. Neben Null- und Einheitsmatrizen ($\underline{\mathbf{0}}$ und $\underline{\mathbf{E}}$) entstehen verblüffender Weise die bereits in Gleichung (17) auftretenden Untermatrizen in transponierter Form, wie die Unabhängigkeitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{U}}^T}$, die Inverse $\underline{\underline{\mathbf{I}}^T}$ und die Bilanzmatrix $\underline{\underline{\mathbf{B}}^T}$.

3.1.3 Widerstandssatz

Der Widerstandssatz stellt mit dem Widerstand R einen linearen Zusammenhang zwischen Durchfluss \dot{m} innerhalb der Rohrleitung und der Druckdifferenz Δp an den Leitungsenden her. Für das Netzwerk gemäß Abbildung 2 sind der Massenstromvektor $\underline{\dot{\mathbf{m}}}$ des Knotensatzes und der Vektor der Druckdifferenzen $\underline{\Delta \mathbf{p}}$ des Maschensatzes mit der Widerstandsmatrix $\underline{\mathbf{R}}$, einer Diagonalmatrix mathematisch verknüpft. Es gilt

$$\begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta p_3 \\ \Delta p_4 \\ \Delta p_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\underline{\Delta \mathbf{p}} = -\underline{\mathbf{R}} \underline{\dot{\mathbf{m}}}$$

Es ist günstig die Gleichung für die Druckverluste (20) mit dem Maschensatz (18) zu kombinieren. Die geschieht über Gleichsetzung und Eliminierung des Vektors für den Druckverlust $\underline{\Delta \mathbf{p}}$, sodass folgt

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}^T} \underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{R}} \underline{\dot{\mathbf{m}}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (21)$$

Der Strömungswiderstand $R = R(\dot{m})$ ist gemäß Gleichung (1) eine Funktion des Massestroms. Für iterative Berechnungen wird daher die differentiale Form für den Druckverlust $\delta \Delta p = -aR \delta \dot{m}$ benötigt. Bezüglich der Eigenschaft der Rohrreibungszahl λ sind zwei Fälle unterscheidbar

$$\begin{aligned} \lambda &= \text{const.} & a &= 2 \\ \lambda &\neq \text{const.} & a &< 2 \end{aligned} \quad (22)$$

Für die Matrixschreibweise der differenzialen Form für den Druckverlust gilt

$$\delta \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta p_3 \\ \Delta p_4 \\ \Delta p_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_1 R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 R_5 \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\delta \underline{\Delta \mathbf{p}} = - \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{R}} \delta \underline{\dot{\mathbf{m}}}$$

Das Produkt aus Ableitungsfaktor a und Widerstand R wird nachfolgend zum Ableitungswiderstand $\hat{R} = aR$ zusammengefasst.

3.2 Hydraulische Berechnung von Fernwärmenetzen

Die Beschreibung der Struktur von Rohrleitungsnetzen geschieht traditionell auf topologische Weise. Dieses Vorgehen stößt bei größeren Netzen an Grenzen der Übersichtlichkeit. Computergestützte Berechnungen von Netzen erfordern ohnehin eine abstrakte „maschinenlesbare“ Form der Strukturdarstellung. Leider erschweren abstrakte Darstellungen von Netzen das intuitive Erkennen isolierter Teilnetze und den daraus folgenden Besonderheiten für die Berechnung.

Eine Netzanalyse ist Apriori notwendig, um die exakte Anzahl vorliegender Netze zu bestimmen. Bei Durchrechnung von Szenarien komplexer Netze können diese bei Leitungsausfällen in mehrere Netze zerfallen. Jedes Teilnetz verringert die Zahl unabhängiger Lösungsgleichungen um Eins. Teilnetze erfordern daher separate Berechnungen. Die nachfolgenden Ausführungen gehen stets von einem Netz aus.

Die Zeilenzahl der Bilanzmatrix $\underline{\mathbf{B}}$ entspricht der Anzahl von Teilnetzen. Die Auswertung der durch Modifikation von Gleichung (17) erhaltenen Teilmatrizen, wie Bilanzmatrix $\underline{\mathbf{B}}$, Inverse $\underline{\mathbf{I}}$, Unabhängigkeitsmatrix $\underline{\mathbf{U}}$ usw. gestattet die eindeutige Separation von Knoten und Leitungen einzelner Teilnetze.

Das komplette Verständnis der mathematischen Herleitungen ist für Anwender nicht zwingend erforderlich. Die relevanten Endgleichungen sind durch Rahmen hervorgehoben. Zu den dargestellten Netztypen befinden sich Berechnungsbeispiele im Abschnitt 5.

3.2.1 Strangnetze

Strangnetze weisen keine Maschen auf. Nach Modifikation der Kopplungsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ existiert keine Unabhängigkeitsmatrix gemäß Gleichung (17). Die Zahl involvierter Leitungen eines Netzes entspricht der um Eins verringerten Knotenzahl und damit dem Rang der Kopplungsmatrix $r = l = k - 1$. Durch Streichung der k -ten Zeile der Kopplungsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ ist diese invertierbar. Der Druck des k -ten Knoten ist damit Null gesetzt. d.h. $p_k = 0$. Es gilt

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{K}}^{-1} \quad (24)$$

Die Massestromverteilung hängt aufgrund fehlender Maschen nicht vom Druckprofil des Netzes, sondern nur von den eingespeisten und entnommenen Massenströme ab und kann

direkt ohne Iterationen berechnet werden

$$\underline{\dot{\mathbf{m}}} = -\underline{\mathbf{I}} \underline{\dot{\mathbf{m}}}_u^{ea} \quad (25)$$

Die Berechnung des Druckprofils erfordert die vorangehende Berechnung der Rohrreibungszahlen. Für die Druckdifferenzen $\underline{\Delta \mathbf{p}}$ entlang der Leitungen gilt gemäß Widerstandssatz nach Gleichung (20)

$$\underline{\Delta \mathbf{p}} = -\underline{\mathbf{R}} \underline{\dot{\mathbf{m}}} \quad (26)$$

Mit der umgestellten Gleichung (21) ergeben sich aus den Druckdifferenzen die abhängigen Knotendrucke

$$\underline{\mathbf{p}}_a = \underline{\mathbf{I}}^T \underline{\Delta \mathbf{p}} \quad (27)$$

Der Druckvektor $\underline{\mathbf{p}}_a$ weist die Differenzen zwischen den Knotendrucke exakt aus. Das Niveau sämtlicher Knotendrucke ist zur Berücksichtigung von Mindestdrücken und geodätischen Höhen um einen Korrekturdruck p_{Korr} „anzuheben“.

3.2.2 Gering vermaschte Netze

Ein gering vermaschtes Netz weist weniger Maschen als Knoten $m < k$ auf. Mit dem Knotensatz existieren für ein Netz $r = k - 1$ unabhängige lineare "Knotengleichungen". Gemäß Gleichung (17) ist es möglich, die Masseströme in eine Menge der abhängigen $\underline{\dot{\mathbf{m}}}_a$ und der unabhängigen $\underline{\dot{\mathbf{m}}}_u$ Masseströme zu separieren. Die Zahl der unabhängigen Masseströme entspricht der Anzahl der Maschen

$$\underline{\mathbf{K}}_a \underline{\dot{\mathbf{m}}}_a + \underline{\mathbf{K}}_u \underline{\dot{\mathbf{m}}}_u + \underline{\dot{\mathbf{m}}}^{ea} = \underline{\mathbf{0}} \quad (28)$$

Durch Umstellung nach dem Vektor der abhängigen Masseströme $\underline{\dot{\mathbf{m}}}_a$ und mit Einführung der Unabhängigkeitsmatrix $\underline{\mathbf{U}}$ sowie dem Anschlussvektor $\underline{\mathbf{V}}$ entsteht die vereinfachte Beziehung

$$\underline{\dot{\mathbf{m}}}_a = -\underline{\mathbf{I}} \underline{\mathbf{K}}_a \underline{\dot{\mathbf{m}}}_u - \underline{\mathbf{I}} \underline{\dot{\mathbf{m}}}^{ea} = -\underline{\mathbf{U}} \underline{\dot{\mathbf{m}}}_u + \underline{\mathbf{V}} \quad (29)$$

Mit Maschensatz und Widerstandsgesetz gilt für Knotendrucke $\underline{\mathbf{p}}$ und abhängige Masseströme $\underline{\dot{\mathbf{m}}}_a$ Gleichung (21)

$$\underline{\mathbf{K}}_a^T \underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{R}}_a \underline{\dot{\mathbf{m}}}_a = \underline{\mathbf{0}} \quad (30)$$

Durch Umstellung der letzten Gleichung nach dem Vektor der Knotendrucke $\underline{\mathbf{p}}$ und Einsetzen der abhängigen Massenströme $\underline{\dot{\mathbf{m}}}_a$ gemäß Gleichung (29) ergibt sich

$$\underline{\mathbf{p}} = -\underline{\mathbf{I}}^T \underline{\mathbf{R}}_a \underline{\dot{\mathbf{m}}}_a = \underline{\mathbf{I}}^T \underline{\mathbf{R}}_a \underline{\mathbf{U}} \underline{\dot{\mathbf{m}}}_u - \underline{\mathbf{I}}^T \underline{\mathbf{R}}_a \underline{\mathbf{V}} \quad (31)$$

Analog zu Gleichung (30) gilt mit Maschensatz und Widerstandsgesetz für Knotendrucke $\underline{\mathbf{p}}$ und die unabhängigen Masseströme $\underline{\dot{\mathbf{m}}}_u$

$$\underline{\mathbf{K}}_u^T \underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{R}}_u \underline{\dot{\mathbf{m}}}_u = \underline{\mathbf{0}} \quad (32)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (31) in die letzte Gleichung und entsprechender Zusammenfassung entsteht die zu lösende Endgleichung für ein Netzwerk. Dieses Gleichungssystem umfasst in verblüffender Weise nur m Gleichungen

$$\left(\underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{R}}_a \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{R}}_u \right) \underline{\dot{\mathbf{m}}}_u + \underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{R}}_a \underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{R}}_u \underline{\dot{\mathbf{m}}}_u - \underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{R}}_a \underline{\dot{\mathbf{m}}}_a = \underline{\mathbf{0}} \quad (33)$$

Aufgrund der Transzendenz von Gleichung (33) ist nur eine iterative Lösung möglich. Die Ermittlung der Widerstände $\underline{\mathbf{R}}$ der Rohrleitungen erfordert eine Startlösung der Massestromverteilung. Für Startwerte der unabhängigen sowie die abhängigen Massenströme gilt

$$\underline{\dot{\mathbf{m}}}_{u,0} = (\underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{E}})^{-1} \underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{V}} \quad \text{und} \quad \underline{\dot{\mathbf{m}}}_{a,0} = \underline{\mathbf{V}} - \underline{\mathbf{U}} \underline{\dot{\mathbf{m}}}_{u,0} \quad (34)$$

Nachdem für sämtliche Masseströme des Netzes Startwerte vorliegen, folgt die Ermittlung der Strömungswiderstände $\underline{\mathbf{R}}$ und deren Ableitungen $\underline{\dot{\mathbf{R}}}$ mit den Gleichungen (1 und 5), d.h.

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{R}}_{u,n} &= R(\underline{\dot{\mathbf{m}}}_{u,0}) & \underline{\dot{\mathbf{R}}}_{u,n} &= A(\underline{\dot{\mathbf{m}}}_{u,0}) \cdot R(\underline{\dot{\mathbf{m}}}_{u,0}) \\ \underline{\mathbf{R}}_{a,n} &= R(\underline{\dot{\mathbf{m}}}_{a,0}) & \underline{\dot{\mathbf{R}}}_{a,n} &= A(\underline{\dot{\mathbf{m}}}_{a,0}) \cdot R(\underline{\dot{\mathbf{m}}}_{a,0}) \end{aligned} \quad (35)$$

Das Prinzip der Lösung eines transzendenten Gleichungssystems beruht auf der Annäherung an die Nullstellen von m Funktionen mit m Variablen d.h. für den Vektor der Funktionen gilt $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{0}}$. Fundamentale Bedeutung wird dabei der Jacobi-Matrix $\underline{\mathbf{J}}$ zu Teil. Die Jacobi-Matrix weist das Format $m \times m$ auf und enthält die partiellen Ableitungen sämtlicher Funktionen F_i nach sämtlichen Variablen \dot{m}_i . Für die Jacobi-Matrix existiert eine geschlossene Beziehung. Für den n -ten Iterationsschritt gilt

$$\underline{\mathbf{F}}_n = \underline{\mathbf{R}}_{u,n} \underline{\dot{\mathbf{m}}}_{u,n} - \underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{R}}_{a,n} \underline{\dot{\mathbf{m}}}_{a,n} \quad \underline{\mathbf{J}}_n = \underline{\mathbf{U}}^T \underline{\dot{\mathbf{R}}}_{a,n} \underline{\mathbf{U}} + \underline{\dot{\mathbf{R}}}_{u,n} \quad (36)$$

Für das Newton-Verfahren gilt im Allgemeinen

$$\underline{\dot{\mathbf{m}}}_{u,n+1} = \underline{\dot{\mathbf{m}}}_{u,n} - \underline{\mathbf{J}}_n^{-1} \underline{\mathbf{F}}_n \quad \text{und} \quad \underline{\dot{\mathbf{m}}}_{a,n+1} = \underline{\mathbf{V}} - \underline{\mathbf{U}} \underline{\dot{\mathbf{m}}}_{u,n+1} \quad (37)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (36) in Gleichung (37) folgt die Beziehung zur Bestimmung der Massestromverteilung für unterschiedliche Rohrreibwerte $\lambda_i \neq const.$

$$\underline{\dot{\mathbf{m}}}_{u,n+1} = \underline{\dot{\mathbf{m}}}_{u,n} - \left(\underline{\mathbf{U}}^T \underline{\dot{\mathbf{R}}}_{a,n} \underline{\mathbf{U}} + \underline{\dot{\mathbf{R}}}_{u,n} \right)^{-1} \left(\underline{\mathbf{R}}_{u,n} \underline{\dot{\mathbf{m}}}_{u,n} - \underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{R}}_{a,n} \underline{\dot{\mathbf{m}}}_{a,n} \right) \quad (38)$$

Im Falle konstanter Rohrreibwerte $\lambda_i = const.$ existiert ein Sonderfall

$$\underline{\dot{\mathbf{m}}}_{u,n+1} = \frac{1}{2} \underline{\dot{\mathbf{m}}}_{u,n} + \frac{1}{2} \left(\underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{R}}_{a,n} \underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{R}}_{u,n} \right)^{-1} \underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{R}}_{a,n} \underline{\mathbf{V}} \quad (39)$$

Nach jedem Iterationsschritt sind die Strömungswiderstände $\underline{\mathbf{R}}$ und deren Ableitungen $\underline{\dot{\mathbf{R}}}$ gemäß den Gleichungen (35) zu aktualisieren. Die Lösung zur Ermittlung der Massenverteilung erfordert vier bis sechs Iterationen.

Am Ende der Iteration, d.h. nach Erreichen der vorgegebenen Genauigkeit sind die abhängigen Knotendrucke $\underline{\mathbf{p}}_a$ des Netzes aus den abhängigen Massenströmen $\underline{\dot{\mathbf{m}}}_a$ gemäß Gleichung (31) iterationslos ermittelbar

$$\underline{\mathbf{p}}_a = -\underline{\mathbf{I}}^T \underline{\mathbf{R}}_a \underline{\dot{\mathbf{m}}}_a \quad (40)$$

Der Rang der Inversen $\underline{\mathbf{I}}$ beträgt $k - 1$. Für den k -ten Knoten existiert keine unabhängige Gleichung, weshalb sein Druck Null ist d.h. $p_k = 0$. Der Druckvektor $\underline{\mathbf{p}}_a$ gibt auch in diesem Fall die Differenzen zwischen den Knotendrucken exakt an. Das Niveau sämtlicher Knotendrucke ist zwecks Berücksichtigung von Mindestdrücken und geodätischen Höhen mit einem Korrekturdruck p_{Korr} „anzuheben“.

3.2.3 Stark vermaschte Netze

Ein stark vermaschtes Netz verfügt über mehr Maschen als Knoten $m > k - 1$. Mit dem Knotensatz, gemäß Gleichung (16) existieren für ein Netz $r = k - 1$ unabhängige lineare „Knotengleichungen $\underline{\mathbf{F}}_k$ “. Mit Maschensatz und Widerstandsgesetz, gemäß Gleichung (18) kommen l weitere unabhängige „Leitungsgleichungen $\underline{\mathbf{F}}_l$ “ hinzu, welche aufgrund des Zusammenhanges $R = R(\dot{m})$ nichtlinear sind.

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{F}}_k &= \underline{\mathbf{K}} \underline{\dot{\mathbf{m}}} + \underline{\dot{\mathbf{m}}}^{ea} = \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{F}}_l &= \underline{\mathbf{R}} \underline{\dot{\mathbf{m}}} + \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{0}}\end{aligned}\quad (41)$$

Die Rohrreibungszahlen λ zur Berechnung der Strömungswiderstände R sind massestromabhängig. Dies erfordert eine iterative Lösung mit Startwerten für die Masseströme der Rohrleitungen. Unter Annahme gleicher Strömungswiderstände R folgt für die Startverteilung der Masseströme $\underline{\dot{\mathbf{m}}}_0$ aus den vorstehenden Gleichungen

$$\underline{\dot{\mathbf{m}}}_0 = -\underline{\mathbf{K}}^T (\underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{K}}^T)^{-1} \underline{\dot{\mathbf{m}}}^{ea} \quad (42)$$

Das Newton-Verfahren zur iterativen Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (41) erfordert eine Jacobi-Matrix mit sämtlichen Differenzialen beider Gleichungen. Es gilt

$$\begin{aligned}\delta \underline{\mathbf{F}}_k &= \underline{\mathbf{K}} \delta \underline{\dot{\mathbf{m}}} \\ \delta \underline{\mathbf{F}}_l &= \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{R}} \delta \underline{\dot{\mathbf{m}}} + \underline{\mathbf{K}}^T \delta \underline{\mathbf{p}}\end{aligned}\quad (43)$$

Zum Zweck der Vereinfachung werden die Diagonalmatrizen der Ableitungsfaktoren a und der Strömungswiderstände R gemäß Gleichung (23) zur Ableitungsmatrix $\underline{\dot{\mathbf{R}}}$ zusammengefasst. Die Anwendung des Newtonverfahrens erfordert die Umstellung nach Differenzialen $\delta \underline{\mathbf{p}}$ und $\delta \underline{\dot{\mathbf{m}}}$. Mit der Lösungsmatrix $\underline{\mathbf{M}} = (\underline{\mathbf{K}} \underline{\dot{\mathbf{R}}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T)^{-1}$ gilt für die umgestellte Gleichung (43)

$$\begin{aligned}\delta \underline{\dot{\mathbf{m}}} &= \underline{\dot{\mathbf{R}}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{M}} \delta \underline{\mathbf{F}}_k + \underline{\dot{\mathbf{R}}}^{-1} - \underline{\dot{\mathbf{R}}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{K}} \underline{\dot{\mathbf{R}}}^{-1} \delta \underline{\mathbf{F}}_l \\ \delta \underline{\mathbf{p}} &= -\underline{\mathbf{M}} \delta \underline{\mathbf{F}}_k + \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{K}} \underline{\dot{\mathbf{R}}}^{-1} \delta \underline{\mathbf{F}}_l\end{aligned}\quad (44)$$

Das Newton-Verfahren mit der Jacobi-Matrix für den n -ten Iterationsschritt

$$\begin{aligned}\underline{\dot{\mathbf{m}}}_{n+1} &= \underline{\dot{\mathbf{m}}}_n - \underline{\dot{\mathbf{R}}}_n^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{M}}_n \underline{\mathbf{F}}_k - \underline{\dot{\mathbf{R}}}_n^{-1} - \underline{\dot{\mathbf{R}}}_n^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{M}}_n \underline{\mathbf{K}} \underline{\dot{\mathbf{R}}}_n^{-1} \underline{\mathbf{F}}_l \\ \underline{\mathbf{p}}_{n+1} &= \underline{\mathbf{p}}_n + \underline{\mathbf{M}}_n \underline{\mathbf{F}}_k - \underline{\mathbf{M}}_n \underline{\mathbf{K}} \underline{\dot{\mathbf{R}}}_n^{-1} \underline{\mathbf{F}}_l\end{aligned}\quad (45)$$

Durch Einsetzen der Funktionen $\underline{\mathbf{F}}_k$ und $\underline{\mathbf{F}}_l$ zeigt sich, dass die untere Gleichung für den Druck $\underline{\mathbf{p}}_{n+1}$ in der oberen Gleichung für den Massenstrom $\underline{\dot{\mathbf{m}}}_{n+1}$ implizit enthalten ist. Damit wird die Matrix $\underline{\mathbf{M}}$ zur Jacobi-Matrix $\underline{\mathbf{J}}$ und die Zahl der iterativ zu lösenden Variablen wird um l reduziert. Die endgültigen Lösungsgleichungen für Knotendrucke und Massenströme lauten

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\mathbf{J}}_n &= (\underline{\mathbf{K}} \underline{\dot{\mathbf{R}}}_n^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T)^{-1} \\ \underline{\mathbf{p}}_{n+1} &= \underline{\mathbf{J}}_n \left(\underline{\mathbf{K}} (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{A}}_n^{-1}) \underline{\dot{\mathbf{m}}}_n + \underline{\dot{\mathbf{m}}}^{ea} \right) \\ \underline{\dot{\mathbf{m}}}_{n+1} &= (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{A}}_n^{-1}) \underline{\dot{\mathbf{m}}}_n - \underline{\dot{\mathbf{R}}}_n^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{p}}_{n+1}\end{aligned}}\quad (46)$$

Für konstante Rohrreibwerte $\lambda = const.$ gilt $\underline{\underline{\mathbf{R}}} = 2\underline{\underline{\mathbf{R}}}$. Dies führt zu einem interessanten Sonderfall

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{J}}}_n &= \left(\underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{R}}}_n^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T\right)^{-1} \\ \underline{\underline{\mathbf{p}}}_{n+1} &= \underline{\underline{\mathbf{J}}}_n \left(\underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{m}}}_n + 2\underline{\underline{\mathbf{m}}}^{ea}\right) \\ \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{n+1} &= \frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{m}}}_n - \frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{R}}}_n^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \underline{\underline{\mathbf{p}}}_{n+1}\end{aligned}} \quad (47)$$

Erfahrungen zeigen, dass der Sonderfall nach Gleichung (47) auch bei Fällen $\lambda \neq const.$ mit fünf bis sechs Iterationen stets zielführend ist. Die Verwendung von Gleichung (46) erspart etwa ein bis zwei Iterationen.

Die Kopplungsmatrix weist den Rang $r = k - 1$ auf. Für den k -ten Knoten existiert wiederum keine unabhängige Gleichung, weshalb sein Druck Null ist d.h. $p_k = 0$. Der Druckvektor $\underline{\underline{\mathbf{p}}}_a$ gibt selbstverständlich die Differenzen zwischen den Knotendrücken exakt wieder. Das Niveau sämtlicher Knotendrücke ist ebenfalls mit dem Korrekturdruck p_{Korr} „anzuheben“, um Mindestdrücke und geodätische Höhen zu berücksichtigen.

3.2.4 Ermittlung des statischen Druckprofils

Aufgrund des Ranges der Kopplungsmatrix $r = k - 1$ sind nur r Knotendrücke bestimmbar. Somit weist der k -te Knotendruck nach der Lösung stets den unrealistischen Wert Null auf. Es ist möglich, zu sämtlichen Knotendrücken einen beliebigen Wert zu addieren, ohne das ein Einfluss auf die Druckdifferenzen $\underline{\underline{\Delta\mathbf{p}}}$ zwischen den Knoten besteht. Der Korrekturdruck p_{Korr} ist derart zu bestimmen, dass der Netzknoten mit dem minimalen Druck einen technologisch bedingten Mindestdruck p_{Mind} unter Berücksichtigung der geodätischen Höhen aufweist.

Mit den Gleichungen (27, 40 und 47) werden für die Knoten jeweils die Gesamtdrücke ermittelt. Diese sind die Summe aus statischem und hydrostatischem Druck. Zur Ermittlung des statischen Druckes ist der hydrostatische Druck vom Gesamtdruck zu subtrahieren. Die Elemente 1, 2, ... $k - 1$ des Gesamtdruckvektors $\underline{\underline{\mathbf{p}}}$ sind mit dem Vektor $\underline{\underline{\mathbf{p}}}_a$ identisch. Das k -te Element ist Null. Für den Vektor der Pseudodrücke $\underline{\underline{\delta}}$ gilt

$$\underline{\underline{\delta}} = \underline{\underline{\mathbf{p}}} - \rho g \underline{\underline{\mathbf{h}}} \quad (48)$$

Die Werte der Pseudodrücke $\underline{\underline{\delta}}$ sind physikalisch bedeutungslos. Nur der minimale Wert δ_{Min} wird zur Ermittlung des Korrekturdruckes p_{Korr} herangezogen. Der Korrekturdruck ist Mindestdruck p_{Mind} abzüglich des minimalen Wertes der Pseudodrücke δ_{Min} . Es gilt

$$p_{Korr} = p_{Mind} - \delta_{Min} \quad (49)$$

Das statische Druckprofil $\underline{\underline{\mathbf{p}}}_s$ der Netzknoten entsteht, indem der Korrekturdruck p_{Korr} zu sämtlichen Werten des Pseudodrucks $\underline{\underline{\delta}}$ addiert wird.

$$\underline{\underline{\mathbf{p}}}_s = \underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\mathbf{1}}} p_{Korr} \quad (50)$$

Der minimale Wert $p_{s,min}$ des Vektors der statischen Drücke $\underline{\underline{\mathbf{p}}}_s$ entspricht dem Mindestdruck p_{Mind} exakt.

4 Thermisches Netzprofil - Wärmeverluste eines Fernwärmenetzes

In Fernwärmenetzen treten beim Transport der thermischen Energie Verluste an die Umgebung auf. Thermisch isolierte Rohrleitungen vermindern dies, verursachen aber zusätzlichen technischen Aufwand. Verluste und Isolierung beeinflussen die Wirtschaftlichkeit von Versorgungsanlagen. Die nachfolgenden Ausführungen behandeln ein mathematisches Modell zur Analyse thermischer Phänomene in Fernwärmenetzen. Die physikalisch begründeten Modelle sind mathematisch exakt und benötigen keine Iterationen.

4.1 Thermische Berechnung einer Rohrleitung

Es ist möglich, Rohrleitungen von Wärmenetzen als Wärmeübertrager aufzufassen. Für die Ermittlung des Temperaturprofils von wärmeabgebenden Medien, welche Rohrleitungen in kalter Umgebung durchströmen, existiert eine exakte Beziehung. Diese beschreibt mit der Betriebscharakteristik Φ den Zusammenhang zwischen Ein- und Austrittstemperatur einer Rohrleitung (T^e, T^a) bei konstanter Umgebungstemperatur T_u . Mit der Betriebscharakteristik Φ gilt die Beziehung

$$T^a = T^e - \Phi (T^e - T_u) \quad (51)$$

Die Betriebscharakteristik Φ_i für eine einzelne Rohrleitung ist der Sonderfall eines Rohr-bündelwärmeübertragers. Bei konstanter Umgebungstemperatur ist die Fließrichtung ohne Bedeutung. Es gilt für die Betriebscharakteristik Φ , die Transferzahl Θ und die Zahl der Übertragungseinheiten N_l

$$\Phi = 1 - \Theta \quad \text{mit} \quad \Theta = e^{-N_l} \quad N_l = \frac{k A}{\dot{m} c} \quad (52)$$

Es ist günstig, Beziehung (51) durch Einführung reduzierter Temperaturen zu vereinfachen. Die reduzierte Temperatur ϑ ist Differenz zwischen technologischer Temperatur und Umgebungstemperatur $\vartheta = T - T_{um}$. Nach der Vereinfachung gilt für die Rohrleitung

$$\vartheta^a = \Theta \vartheta^e \quad (53)$$

Auf den vorstehenden Gleichungen basiert das nachfolgende allgemeine Gesamtmodell für Rohrleitungsnetze.

4.2 Temperaturvermischung in Netzknoten

Wärmeträgerströme verlassen Knoten mit deren Temperatur ϑ^e in abgehende Rohrleitungen. Ein geringer Teil thermischer Energie gelangt als Wärme in die Umgebung. Der größte Teil thermischer Energie gelangt als Enthalpiestrom mit der Austrittstemperatur der Leitung ϑ^a in weitere Netzknoten. Für eintretende Enthalpieströme \dot{H}^a in die Knoten gilt

$$\dot{H}^a = \dot{m} c \vartheta^a = \dot{m} c \Theta \vartheta^e \quad (54)$$

In die Knoten des Wärmenetzes treten Enthalpieströme mit unterschiedlicher Temperatur ein und verlassen diese mit einer Mischtemperatur. Für die Mischtemperatur ϑ_k eines Knoten mit s internen und e externen eintretenden Wärmeträgerströmen gilt im Allgemeinen

$$\vartheta_k \left(\sum_{i=1}^s \dot{m}_i c + \sum_{i=1}^e \dot{m}_i^E c \right) = \sum_{i=1}^s \dot{m}_i c \vartheta_i^a + \sum_{i=1}^e \dot{m}_i^E c \vartheta_i^E \quad (55)$$

Bei Umstellung nach der Mischtemperatur ϑ_k eines k -ten Netzknotens entfällt die spezifische Wärmekapazität, da diese mit guter Näherung als konstant angenommen wird

$$\vartheta_k = \frac{\sum_{i=1}^s \dot{m}_i \vartheta_i^a + \sum_{i=1}^e \dot{m}_i^E \vartheta_i^E}{\sum_{i=1}^s \dot{m}_i + \sum_{i=1}^e \dot{m}_i^E} \quad (56)$$

Die Mischtemperaturen ϑ_k der Wärmeträgerströme in den Knoten sind die Eintrittstemperaturen ϑ_i^e der Rohrleitungen mit den abfließenden Massenströmen.

4.3 Stationäre Temperaturprofile

Für die Berechnung von Temperaturprofilen in Fernwärmenetzen erweist sich sequenzielles Vorgehen als vorteilhaft. Die Reihenfolge der Berechnungsschritte erfolgt topologisch entlang der Druckgefälle von Einspeiseknoten zu Ausgangsknoten der Rohrleitungen. Am Netzknoten mit dem höchsten Druck wird begonnen. Von diesem treten nur Wärmeträgerströme aus und tragen thermische Energie in Knoten mit geringerem Druck ein. Für jede durchströmte Rohrleitung ist bei gegebenem Durchsatz, Eingangstemperatur und Isolationaleigenschaften gemäß Gleichung (53) die in den nächsten Knoten eintretende Temperatur berechenbar. Somit ergeben die eintretenden Ströme aus Knoten mit höherem Druck nach Gleichung (56) Mischtemperaturen mit denen die abfließenden Ströme Rohrleitungen zu Knoten geringeren Druckes speisen.

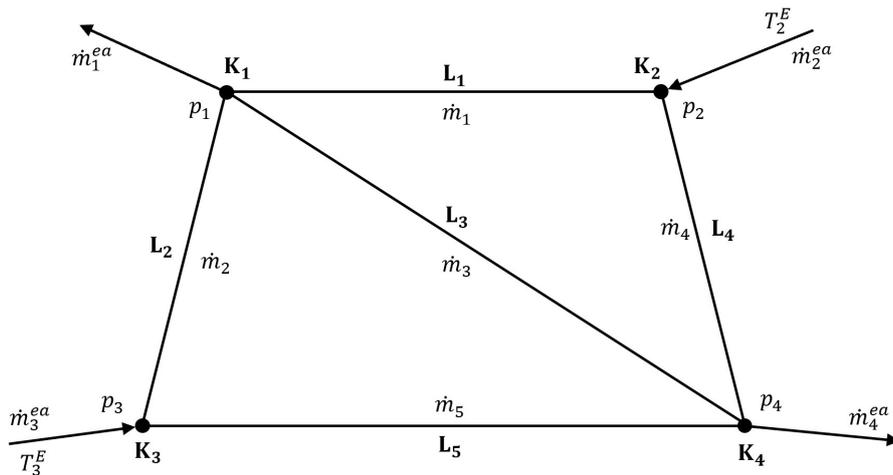


Abbildung 3: Netzwerk mit vier Knoten und fünf verbindenden Leitungen

Für die Knotendrucke des in Abbildung 3 dargestellten Rohrleitungsnetzes gilt beispielsweise

$$p_{k3} > p_{k2} > p_{k1} > p_{k4} \quad (57)$$

Die Berechnung beginnt am Knoten mit dem höchsten Druck. Dies ist Knoten K_3 mit dem größten extern eingespeisten Massenstrom. Von diesem Knoten fließen nur interne Masseströme ab. Somit entspricht die Knotentemperatur ϑ_{k3} der Temperatur des eingespeisten Stromes ϑ_3^E . Es gilt

$$\vartheta_{k3} = \vartheta_3^E \quad (58)$$

Analog entspricht die Temperatur ϑ_{k2} des Knoten K_2 der Temperatur des einzigen eingespeisten Stroms ϑ_2^E

$$\vartheta_{k2} = \vartheta_2^E \quad (59)$$

Im Knoten K_1 erfolgt die Mischung der Prozessströme „1“ und „2“. Für die Temperatur ϑ_{k1} des Knoten K_1 gilt gemäß Beziehung (56)

$$\vartheta_{k1} = v_1 \Theta_1 \vartheta_{k2} + v_2 \Theta_2 \vartheta_{k3} \quad (60)$$

Die dazugehörigen Mischungskoeffizienten der Wärmeträgerströme „1“ und „2“ für den Knoten K_1 lauten

$$v_1 = \frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_1 + \dot{m}_2}, \quad v_2 = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1 + \dot{m}_2} \quad (61)$$

Für Knoten K_4 gilt analog

$$\vartheta_{k4} = v_3 \Theta_3 \vartheta_{k1} + v_4 \Theta_4 \vartheta_{k2} + v_5 \Theta_5 \vartheta_{k3} \quad (62)$$

Die Mischungskoeffizienten der Wärmeträgerströme „3“, „4“ und „5“ für den Knoten K_3 lauten

$$v_3 = \frac{\dot{m}_3}{\dot{m}_3 + \dot{m}_4 + \dot{m}_5}, \quad v_4 = \frac{\dot{m}_4}{\dot{m}_3 + \dot{m}_4 + \dot{m}_5}, \quad v_5 = \frac{\dot{m}_5}{\dot{m}_3 + \dot{m}_4 + \dot{m}_5} \quad (63)$$

Die nachfolgende Matrizengleichung fasst die mit den Gleichungen (58 bis 63) beschriebenen Abhängigkeiten in der Transfermatrix $\underline{\Theta}$ zusammen. Interessanterweise gelten die kausalen „Linien“ völlig analog für das dynamische Modell.

$$\begin{bmatrix} \vartheta_{k1} \\ \vartheta_{k2} \\ \vartheta_{k3} \\ \vartheta_{k4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \Theta_1 & v_2 \Theta_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ v_1 \Theta_1 v_2 \Theta_2 + v_4 \Theta_4 & v_2 \Theta_2 v_3 \Theta_3 + v_5 \Theta_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_2^E \\ \vartheta_3^E \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\underline{\vartheta}_k = \underline{\Theta} \underline{\vartheta}^E$$

Um die endgültigen Knotentemperaturen T_k zu erhalten, wird zu den reduzierten Temperaturen ϑ die Umgebungstemperatur T_u addiert. Das sequenzielle Vorgehen ist ohne Iteration stets zielführend.

4.4 Dynamische Temperaturprofile

Für Betreiber von Fernwärmenetzen sind bei Lastwechseln Vorabinformationen über örtliche und zeitliche Temperaturveränderungen wichtig. Da das Wärmeträgermedium Wasser inkompressibel ist, erfolgen Verschiebungen von Masseströmen durch Änderung von Pumpenleistungen praktisch verzögerungsfrei. Eine völlig andere Situation liegt bei der zeitlichen Ausbreitung von Temperaturänderungen entlang der Fließrichtung der Wärmeträgerströme vor.

Ein mathematisches Modell zur dynamischen Beschreibung von Systemen, d.h. mit zeitlich und örtlich veränderlichen Temperaturen erfordert partielle Differenzialgleichungen. Die Anwendung von Zellenmodellen reduziert eine partielle Differenzialgleichung auf ein gut lösbares System gewöhnlicher Differenzialgleichungen. Nachfolgend wird ein praktikables Modell auf Grundlage der Laplace-Transformation dargestellt [6].

Eine Rohrleitung des Fernwärmenetzes wird als Reihenschaltung von n durchströmten Zellen aufgefasst. Innerhalb der Zellen wird ideale Durchmischung postuliert. Dies kommt indirekt der Dispersion in den Rohrleitungen nah. Die Abbildung 4 zeigt einen Ausschnitt einer Rohrleitung mit drei Inkrementen.

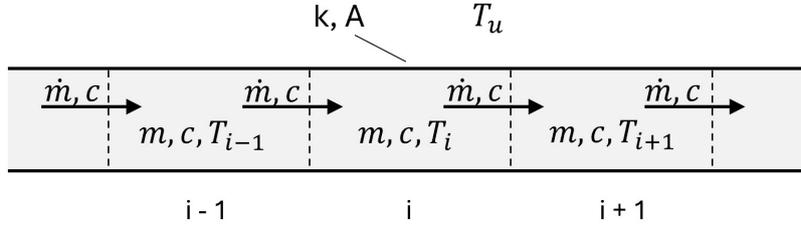


Abbildung 4: Ausschnitt einer Rohrleitung mit drei inkrementellen Zellen

Für die i -te Zelle gilt die instationäre Enthalpie- und Wärmebilanz

$$mc \frac{d}{dt} T_i = \dot{m} c T_{i-1} - \dot{m} c T_i - kA (T_i - T_u) \quad (65)$$

Nach Vereinfachung mit der reduzierten Temperatur $\vartheta = T - T_u$, der Zahl der Übertragungseinheiten N und der mittleren Verweilzeit τ gilt

$$\tau \frac{d}{dt} \vartheta_i = \vartheta_{i-1} - (1 + N) \vartheta_i \quad \text{mit } N = \frac{kA}{\dot{m}c} \quad \text{und } \tau = \frac{m}{\dot{m}} \quad (66)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Zelle im stationären Gleichgewicht. Hierfür gilt

$$0 = \vartheta_{i-1}^{(0)} - (1 + N) \vartheta_i^{(0)} \quad (67)$$

Das dynamische Modell beschreibt die Wirkung einer Störung in Form der geänderten Eingangsgröße $\Delta \vartheta_{i-1}$, welche die Zelle im Anfangszustand des stationären Gleichgewichts $\vartheta_i^{(0)}$ erfährt und dadurch einem neuen stationären Endzustand $\vartheta_i^{(0)} + \Delta \vartheta_i$ zustrebt.

$$\tau \frac{d}{dt} \Delta \vartheta_i = \vartheta_{i-1}^{(0)} + \Delta \vartheta_{i-1} - (1 + N) \left(\vartheta_i^{(0)} + \Delta \vartheta_i \right) \quad (68)$$

Nach Subtraktion der stationären Gleichung (67) entsteht für die zeitlichen Änderungsterme

$$\tau \frac{d}{dt} \Delta\vartheta_i = \Delta\vartheta_{i-1} - (1 + N) \Delta\vartheta_i \quad (69)$$

Die voranstehende Gleichung ist für Rohrleitungen mit beliebiger Zellenzahl anwendbar. Sehr zweckmäßig ist die Nutzung von Matrizen und Vektoren. Die nachfolgende Matrixdifferentialgleichung beschreibt exemplarisch drei Zellen einer Rohrleitung.

$$\tau \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\vartheta_1 \\ \Delta\vartheta_2 \\ \Delta\vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - N & 0 & 0 \\ 1 & -1 - N & 0 \\ 0 & 1 & -1 - N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\vartheta_1 \\ \Delta\vartheta_2 \\ \Delta\vartheta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\vartheta^E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$\tau \frac{d}{dt} \underline{\underline{\Delta\vartheta}} = -\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{N}}} \underline{\underline{\Delta\vartheta}} + \underline{\underline{\Delta\vartheta}}^E$$

Das System strebt einem stationären Endzustand asymptotisch entgegen. Für diesen Endzustand gilt

$$\begin{bmatrix} \Delta\vartheta_1 \\ \Delta\vartheta_2 \\ \Delta\vartheta_3 \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 1 + N & 0 & 0 \\ 1 & 1 + N & 0 \\ 0 & 1 & 1 + N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta\vartheta^E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + N)^{-1} \\ (1 + N)^{-2} \\ (1 + N)^{-3} \end{bmatrix} \vartheta^E \quad (71)$$

$$\underline{\underline{\Delta\vartheta}}_s = (\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{N}}})^{-1} \underline{\underline{\Delta\vartheta}}^E$$

Die letzte Zeile der Gleichung (71) formuliert die stationäre Austrittstemperatur der n -ten Zelle und damit der Rohrleitung.

Es ist günstig die Zahl der Übertragungseinheiten N einer Zelle größer als den n -ten Teil der Übertragungseinheit N_l der Rohrleitung zu wählen. Die mittlere Temperaturdifferenz der Rohrleitung ist größer, als bei einer Kaskade von Rohrleitungszellen mit Temperaturstufen. Für die Betriebscharakteristik Φ_n einer Kaskade von n ideal durchmischten Zellen gilt

$$\Phi_n = 1 - \frac{1}{(1 + N)^n} \quad (72)$$

Wird die Betriebscharakteristik Φ_n der Zellschaltung mit jener der Rohrleitung Φ_i gemäß Gleichung (52) gleichgesetzt, folgt für die Zahl der Übertragungseinheiten N der einzelnen Zelle

$$N = \left(e^{\frac{N_l}{n}} - 1 \right) > \frac{N_l}{n} \quad (73)$$

Die modifizierte Zahl der Übertragungseinheiten N stellt sicher, dass die Temperaturen während der dynamischen Simulation exakt den stationären Endtemperaturen gemäß Gleichung (53) zustreben.

Durch Laplace-Transformation geht das beschreibende Differenzialgleichungssystem der Rohrleitung in ein lineares Gleichungssystem über. Aus den reduzierten zeitabhängigen Temperaturen $\Delta\vartheta(t)$ werden Funktionen $\theta(s)$ der komplexen Variablen s . Für die Ableitungen der reduzierten Temperaturen gilt mit $\Delta\vartheta(0) = 0$ vereinfacht

$$s\theta = \frac{d}{dt} \Delta\vartheta \quad (74)$$

Im Falle einer sprunghaften Änderung der Eingangstemperatur $\Delta\vartheta^E$ gilt für die laplace-transformierte reduzierte Temperatur θ^E (prinzipiell sind auch alternative Eingangsfunktionen formulierbar).

$$\theta^E = \frac{\Delta\vartheta^E}{s} \quad (75)$$

Durch Einsetzen der letzten beiden Gleichungen in die Differenzialgleichung (70) folgt

$$s\tau \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - N & 0 & 0 \\ 1 & -1 - N & 0 \\ 0 & 1 & -1 - N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta^E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$s\tau \underline{\theta} = -\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{N}} \underline{\theta} + \underline{\theta}^E$$

Die Lösung des transformierten Gleichungssystems erfolgt durch Umstellung nach dem Vektor der laplace-transformierten reduzierten Temperaturen $\underline{\theta}$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + N + s\tau & 0 & 0 \\ -1 & 1 + N + s\tau & 0 \\ 0 & -1 & 1 + N + s\tau \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \theta^E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\underline{\theta} = (\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{N}} + s\tau \underline{\mathbf{E}})^{-1} \underline{\theta}^E$$

Für die Temperatur des Rohraustritts d.h. der n -ten Zelle gilt im Bildbereich ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\theta_n = \frac{\theta^E}{(1 + N + s\tau)^n} \quad (78)$$

Die Rücktransformation vom Bild- in den Zeitbereich ergibt für die Temperaturänderung $\Delta\vartheta_n$ als Funktion der Zeit t

$$\Delta\vartheta_n = \frac{\Delta\vartheta^E}{(1 + N)^n} - \Delta\vartheta^E e^{-(1+N)\frac{t}{\tau}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \frac{t^i}{\tau^i} \frac{1}{(1 + N)^{n-i}} \quad (79)$$

Die Simulation von Rohrnetzen erfolgt zweckmäßigerweise nicht im Zeitbereich, sondern im Bildbereich, da gemäß Gleichung (78) Ausgangsfunktionen aus dem Produkt von separaten Übertragungsfunktionen und Eingangsfunktionen folgen. Die verallgemeinerte Gleichung (78) lautet

$$\theta = F \cdot \theta^E \quad (80)$$

Bei der Erstellung eines dynamischen Modells für ein Rohrleitungsnetz sind die einzelnen laplace-transformierten Übertragungsfunktionen F_i entlang der Kausalketten zu multiplizieren und an Knoten entsprechend zu addieren.

Für das Netz gemäß Abbildung 3 gilt bei sprunghafter Änderung der Eintrittstemperatur $\Delta\vartheta_3^E$ in den Knoten 3

$$\theta_{k3} = \theta_3^E \quad (81)$$

Analog gilt für eine sprunghafte Änderung der Eintrittstemperatur $\Delta\theta_2^E$ in den Knoten 2

$$\theta_{k2} = \theta_2^E \quad (82)$$

Für die laplace-transformierte Temperaturänderung θ_{k1} des Knoten K_1 ergibt sich durch Multiplikation der jeweiligen Eingangsfunktionen θ_{ki} der Knoten „2“ und „3“ sowie der Übertragungsfunktionen F_i der Leitungen „1“ und „2“ und anschließender mit Mischungskoeffizienten v_i gewichteter Addition

$$\theta_{k1} = v_1 F_1 \theta_{k2} + v_2 F_2 \theta_{k3} \quad (83)$$

Die laplace-transformierte Temperaturänderung des Knoten K_4 erfolgt völlig analog entlang der kausalen Wirkungsketten

$$\theta_{k4} = v_3 F_3 \theta_{k1} + v_4 F_4 \theta_{k2} + v_5 F_5 \theta_{k3} \quad (84)$$

Völlig analog zur stationären Simulation beschreibt die Übertragungsmatrix $\underline{\mathbf{F}}$ die Änderungen der Knotentemperaturen θ_{ki} in Abhängigkeit von Änderungen der Eingangstemperaturen $\underline{\theta}_i^E$ im Bildbereich.

$$\begin{bmatrix} \theta_{k1} \\ \theta_{k2} \\ \theta_{k3} \\ \theta_{k4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 F_1 & v_2 F_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ v_1 F_1 v_3 F_3 + v_4 F_4 & v_2 F_2 v_3 F_3 + v_5 F_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2^E \\ \theta_3^E \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\underline{\theta}_k = \underline{\mathbf{F}} \underline{\theta}^E$$

Bei den Termen in der ersten und vierten Zeile der Übertragungsmatrix handelt es sich um rationale Funktionen im Bildbereich. Nach Partialbruchzerlegung dieser Funktionen und anschließender Rücktransformation entstehen die dynamischen Lösungsfunktionen im Zeitbereich.

Bei hohen Zellenzahlen der Modelle für die Rohrleitungen sind die vorstehend demonstrierten Modelle meist zu umfangreich, um sie in Gesamtmodelle für Rohrleitungsnetze zu implementieren. In diesen Fällen ist eine Approximation von pT_n -Gliedern der Rohrleitungen zu einem pT_1 -Glied oder pT_2 -Glied mit einer Totzeit T_t sinnvoll, z.B.

$$F(s) = \frac{1}{(1 + N + s\tau)^{100}} \approx \frac{e^{-sT_t}}{1 + N + s\tau} \quad \text{oder} \quad \frac{e^{-sT_t}}{(1 + N + s\tau)^2} \quad (86)$$

Die Abbildung 5 zeigt das Temperaturprofil einer Rohrleitung gemäß einem Modells, bestehend aus $n = 100$ Zellen zum Zeitpunkt t sowie zwei durch Approximation erhaltene

Ein- und Zweizellenmodelle, welche beide mit einer Totzeit beaufschlagt wurden.

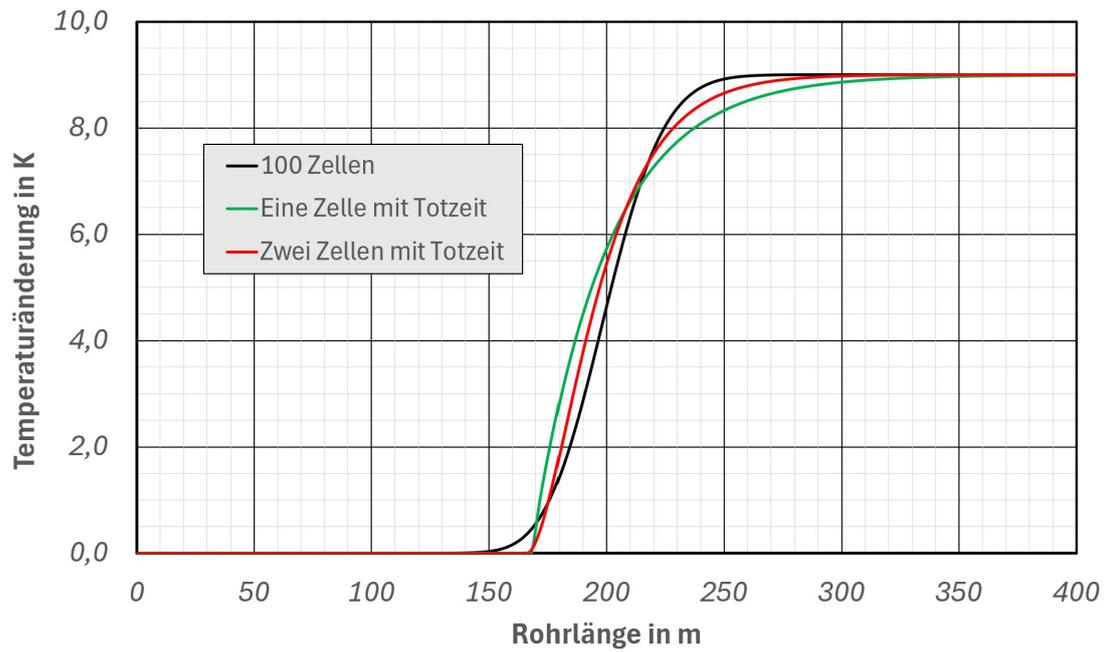


Abbildung 5: Örtliches Profil der Temperaturänderung

Die Approximation zeigt eine sehr gute Annäherung. Bei der Multiplikation der Übertragungsfunktionen entlang kausaler „Linien“ werden Totzeiten in den Exponentialtermen formal addiert und später problemlos rücktransformiert.

5 Berechnungsbeispiele

Die dargestellten Modelle werden an Beispielen demonstriert. Hier existiert ein Antagonismus. Kleine Beispiele sind meist Sonderfälle und lassen den allgemeinen Charakter von Aussagen nur schwach erkennen. Umfangreiche Beispiele sind aus Gründen des Seitenformats kaum darstellbar, oft unübersichtlich und folglich wenig mitteilungs-fähig. Nachfolgend wird der Versuch unternommen beiden Schwierigkeiten auszuweichen.

5.1 Netzanalyse

Vor der Berechnung eines Fernwärmenetzes ist die Analyse der Strukturdaten erforderlich, um die Existenz von Teilnetzen auszuschließen. Liegen Teilnetze vor, sind diese zu separieren und einzeln zu berechnen.

Die Abbildung 6 zeigt ein Netz ($n = 1$), welches $k = 7$ Knoten mit $l = 12$ Leitungen verbindet. In Übereinstimmung mit Gleichung (14) weist dieses Netz $m = l - k + n = 6$ Maschen auf.

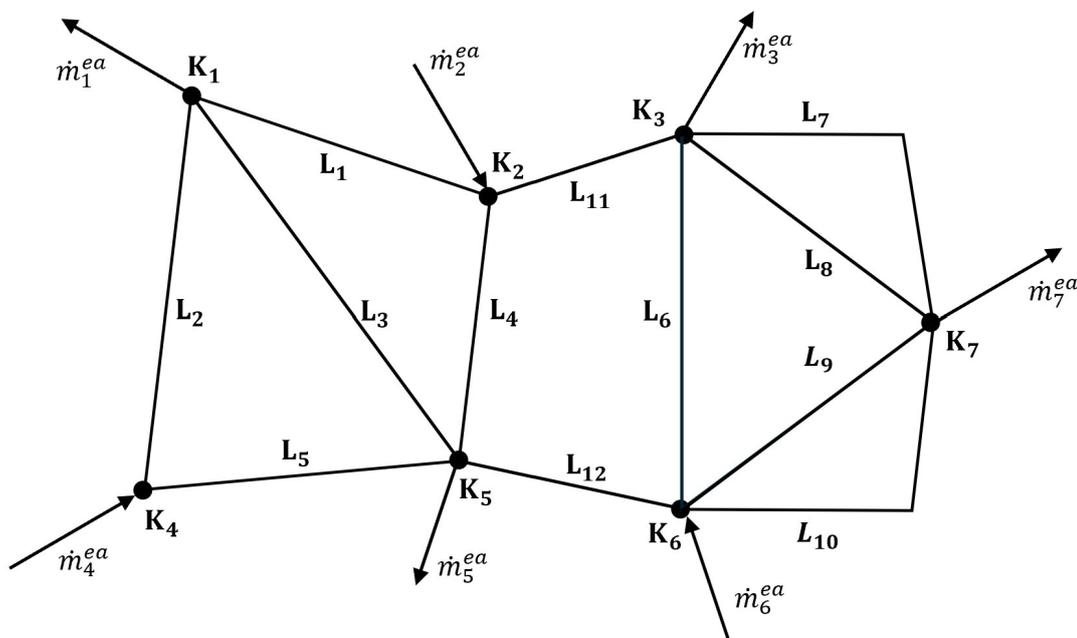


Abbildung 6: Ein Netzwerk mit $k = 7$ Knoten und $l = 12$ Leitungen

Der Knotensatz formuliert mit Kopplungsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ und Einheitsmatrix $\underline{\mathbf{E}}$ den Zusammenhang zwischen internen Massenströmen $\underline{\dot{\mathbf{m}}}$ und externen Massenströmen $\underline{\dot{\mathbf{m}}}^{ea}$ in Form von

Massenbilanzen. Für das in Abbildung 6 dargestellte Netz gilt

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \\ \dot{m}_6 \\ \dot{m}_7 \\ \dot{m}_8 \\ \dot{m}_9 \\ \dot{m}_{10} \\ \dot{m}_{11} \\ \dot{m}_{12} \end{bmatrix} \dots$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_1^{ea} \\ \dot{m}_2^{ea} \\ \dot{m}_3^{ea} \\ \dot{m}_4^{ea} \\ \dot{m}_5^{ea} \\ \dot{m}_6^{ea} \\ \dot{m}_7^{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} \quad \underline{\underline{\mathbf{m}}} \quad + \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad \underline{\underline{\mathbf{m}}}^{ea} \quad = \quad \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Durch Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens entsteht im linken Teil der Kopplungsmatrix eine Einheitsmatrix des Ranges $r = 6$ sowie eine Nullzeile, d.h. es liegt ein Netz ($n = 1$) vor. Im Allgemeinen erfordert dieses Verfahren das Vertauschen von Spalten der Kopplungsmatrix und der dazu gehörigen inneren Massenströmen sowie das Vertauschen von Zeilen in Kopplungs- und Einheitsmatrix und der entsprechenden externen Massenströmen.

In der letzten Zeile der ursprünglichen Einheitsmatrix entsteht links vor dem verbleibenden Rest der Einheitsmatrix eine Reihe von Einsen. Diese Zeile formuliert die Gesamtbilanz

des Netzes, d.h. die Summe von ein- und austretenden Masseströmen ist Null.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_7 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_{11} \\ \dot{m}_6 \\ \dots \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_8 \\ \dot{m}_9 \\ \dot{m}_{10} \\ \dot{m}_5 \\ \dot{m}_{12} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_1^{ea} \\ \dot{m}_2^{ea} \\ \dot{m}_3^{ea} \\ \dot{m}_4^{ea} \\ \dot{m}_5^{ea} \\ \dot{m}_6^{ea} \\ \dot{m}_7^{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{E}}} & \underline{\underline{\mathbf{U}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_a \\ \underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{I}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}} & \underline{\underline{\mathbf{E}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_a^{ea} \\ \underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_u^{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix}$$

Der Rang der Kopplungsmatrix beträgt offensichtlich $r = 6$, d.h. es liegt ein Netz ($n = k - r = 1$) mit $m = l - k + 1 = 6$ Maschen vor.

Nachfolgend wird die Situation des Netzes nach Ausfall der Leitungen L_{11} und L_{12} untersucht. Wie Abbildung 7 zeigt, zerfällt das Netz dadurch in zwei Teilnetze. Bei komplexen Netzen ist es auf topologisch-visuelle Weise schwierig Teilnetze sicher zu erkennen.

Der Gauß-Jordan-Algorithmus liefert stets eine sichere Aussage.

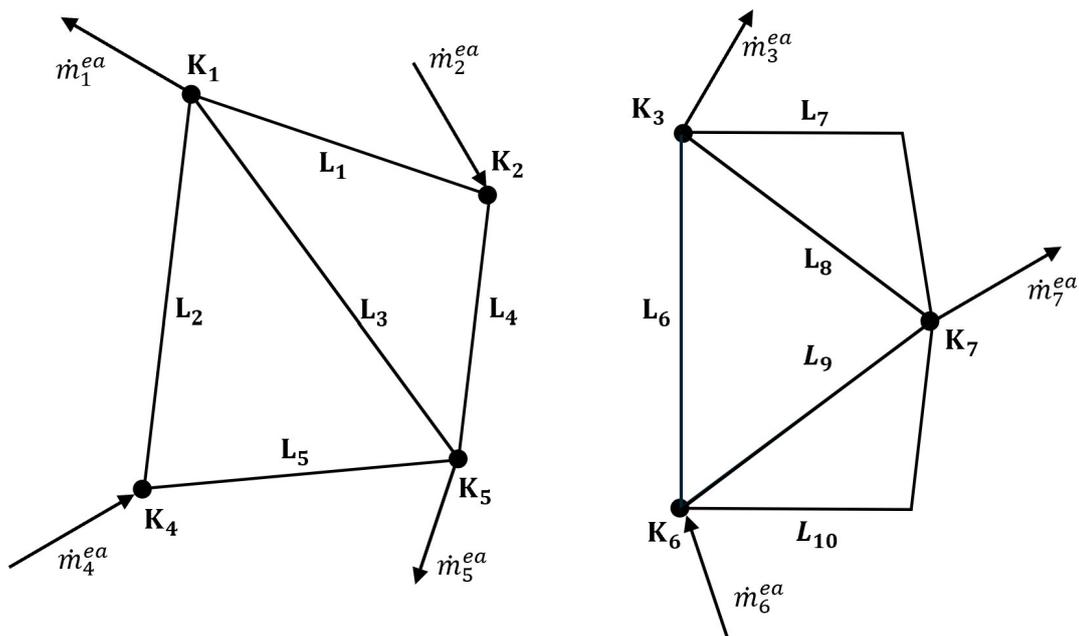


Abbildung 7: Zwei Teilnetze durch den Wegfall der Leitungen 11 und 12

Die nachfolgende Gleichung beschreibt den Knotensatz für beide Teilnetze der Abbildung 7. Die Kopplungsmatrix weist in diesem Fall $k = 7$ Zeilen und $l = 10$ Spalten auf

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \\ \dot{m}_6 \\ \dot{m}_7 \\ \dot{m}_8 \\ \dot{m}_9 \\ \dot{m}_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_1^{ea} \\ \dot{m}_2^{ea} \\ \dot{m}_3^{ea} \\ \dot{m}_4^{ea} \\ \dot{m}_5^{ea} \\ \dot{m}_6^{ea} \\ \dot{m}_7^{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{K}} \quad \underline{\mathbf{m}} \quad + \quad \underline{\mathbf{E}} \quad \underline{\mathbf{m}}^{ea} \quad = \quad \underline{\mathbf{0}}$$

Am Ende des Gauß-Jordan-Verfahrens entsteht aus der Kopplungsmatrix eine Einheitsmatrix des Ranges $r = 5$ sowie eine Nullmatrix mit zwei Zeilen, d.h. es liegen zwei Netze

$n = 2$ vor. Die Bilanzmatrix $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ weist die Knoten der Teilnetze aus. Die Position der Einsen in den Zeilen bezeichnet die Knoten der Teilnetze. Der Wert $B(i, j) = 1$ bedeutet das i -te Teilnetz schließt den j -ten Knoten ein. Hierbei ist der Zeilentausch zu beachten!

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_6 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_7 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \\ \dot{m}_8 \\ \dot{m}_9 \\ \dot{m}_{10} \end{bmatrix} \dots \\
 & + \left[\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{m}_1^{ea} \\ \dot{m}_2^{ea} \\ \dot{m}_3^{ea} \\ \dot{m}_4^{ea} \\ \dot{m}_7^{ea} \\ \hline \dot{m}_6^{ea} \\ \dot{m}_5^{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{\mathbf{E}}} & \underline{\underline{\mathbf{U}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{\dot{m}}}_a \\ \underline{\underline{\dot{m}}}_u \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{\mathbf{I}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}} & \underline{\underline{\mathbf{E}}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{\dot{m}}}_a^{ea} \\ \underline{\underline{\dot{m}}}_u^{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Durch den gezielten Tausch von Zeilen und Spalten erfolgt die Separation in die Teilnetze A und B. Die oberen vier Zeilen repräsentieren Teilnetz A, die unteren drei Zeilen reprä-

sentieren Teilnetz B.

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \\ \hline \dot{m}_6 \\ \dot{m}_7 \\ \dot{m}_8 \\ \dot{m}_9 \\ \dot{m}_{10} \end{bmatrix} \dots \\
& + \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{m}_1^{ea} \\ \dot{m}_2^{ea} \\ \dot{m}_4^{ea} \\ \dot{m}_5^{ea} \\ \hline \dot{m}_3^{ea} \\ \dot{m}_7^{ea} \\ \dot{m}_6^{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \left[\begin{array}{cc|cc} \underline{\underline{\mathbf{E}}} & \underline{\underline{\mathbf{U}}}_A & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \hline \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{E}}} & \underline{\underline{\mathbf{U}}}_B \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{\dot{m}}}_{A,a} \\ \underline{\underline{\dot{m}}}_{A,u} \\ \underline{\underline{\dot{m}}}_{B,a} \\ \underline{\underline{\dot{m}}}_{B,u} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc|cc} \underline{\underline{\mathbf{I}}}_A & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}}_A & \underline{\underline{\mathbf{E}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \hline \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{I}}}_B & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{B}}}_B & \underline{\underline{\mathbf{E}}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{\dot{m}}}_{A,u}^{ea} \\ \underline{\underline{\dot{m}}}_{A,a}^{ea} \\ \underline{\underline{\dot{m}}}_{B,u}^{ea} \\ \underline{\underline{\dot{m}}}_{B,a}^{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \quad (87)
\end{aligned}$$

Das Teilnetz A umfasst $k_A = 4$ Knoten, $l_A = 5$ Leitungen und $m_A = 2$ Maschen. Damit ist das Teilnetz A ein gering vermaschtes Netz. Das Teilnetz B umfasst dagegen $k_B = 3$ Knoten, $l_B = 5$ Leitungen und $m_B = 3$ Maschen. Diese Eigenschaften weisen Netz B als ein kleines stark vermaschtes Netz aus. Die Berechnung beider Teilnetze erfolgt getrennt.

5.2 Strangnetz

Strangnetze weisen keine Maschen ($m = 0$) auf. Zwischen der Anzahl von Leitungen und Knoten gilt $k - l = 1$. Abbildung 8 zeigt ein Strangnetz mit $k = 6$ Knoten und $l = 5$ Leitungen. Dieses Netz verfügt über zwei Einspeisungen und zwei Entnahmen.

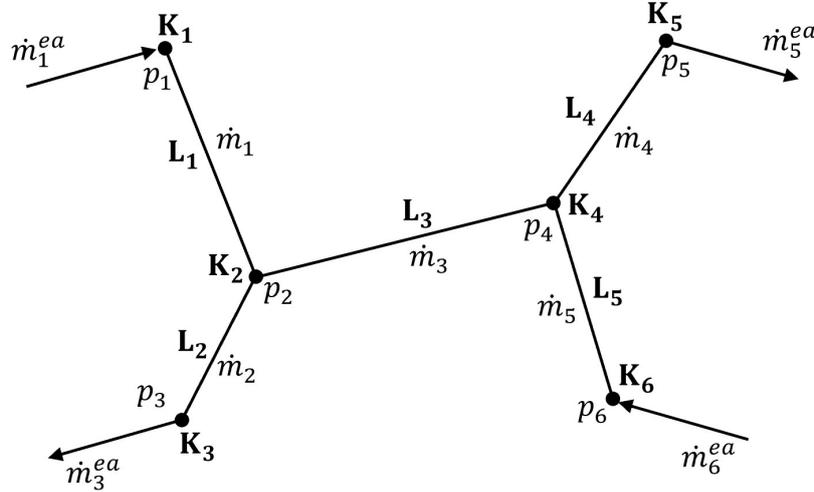


Abbildung 8: Strangnetz mit $k = 6$ Knoten und $l = 5$ Leitungen

Die Struktur des Strangnetzes wird mit der nachfolgenden Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ formuliert. Die Kopplungsmatrix weist das Format $k \times l$ und den Rang $r = k - 1$ auf.

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wird der Druck des Knoten K_6 als unabhängiger Druck festgelegt und Null gesetzt, d.h. $p_6 = 0$, kann die sechste Zeile der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ entfallen. Somit liegt ein bestimmtes Gleichungssystem vor, um fünf abhängige Drücke $\underline{\underline{\mathbf{p}}}_a$ der Knoten K_1 bis K_5 zu bestimmen. Mit $r = 5$ Zeilen ist die Kopplungsmatrix invertierbar. Nach Gleichung (24) gilt

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Die Verteilung der Massenströme hängt bei Strangnetzen gemäß Gleichung (25) nur von deren Struktur ab

$$\underline{\underline{\mathbf{m}}} = -\underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\mathbf{m}}}^{ea} = - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.0 \\ 0 \\ -11.0 \\ 0 \\ -9.0 \end{bmatrix} kg \ s^{-1} = \begin{bmatrix} 8.0 \\ 11.0 \\ -3.0 \\ 9.0 \\ -12.0 \end{bmatrix} kg \ s^{-1}$$

Die zur hydraulischen Berechnung erforderlichen Stoffdaten wie Dichte ρ , dynamische Viskosität η und Erdbeschleunigung g sowie technologische Daten wie Rohrleitungslänge l , Rohrdurchmesser d und relative Wandrauigkeit k sind nachfolgend aufgeführt

$$\begin{aligned} \rho &= 1000 \text{ kg m}^{-3} & l_i &= 1000 \text{ m} \\ \eta &= 0.001 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-1} & d_i &= 0.1 \text{ m} \\ g &\approx 10.0 \text{ m s}^{-2} & k &= 0.1 \text{ mm} \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Reynoldszahl für die Rohrströmung gilt

$$Re_i = \frac{w_i d_i \rho}{\eta} = \frac{4 \dot{m}_i}{\pi d_i \eta}$$

Aus den Massenströmen der Rohrleitungen ergeben sich die Reynoldszahlen

$$\underline{\mathbf{Re}}^T = [101859 \quad 140056 \quad 38197 \quad 114592 \quad 152789]$$

Die Rohrreibungswerte der Rohrleitungen gemäß Gleichung (11)

$$\underline{\lambda}^T = [0.0221 \quad 0.0215 \quad 0.0250 \quad 0.0219 \quad 0.0214]$$

Die Strömungswiderstände der Rohrleitungen

$$\underline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0.1441 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1929 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0610 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1604 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2090 \end{bmatrix} \text{ bar s kg}^{-1}$$

Für die Druckverluste $\underline{\Delta \mathbf{p}}$ entlang der einzelnen Rohrleitungen gilt Gleichung (26)

$$\begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta p_3 \\ \Delta p_4 \\ \Delta p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.144 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.193 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.061 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.160 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.209 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.0 \\ 11.0 \\ -3.0 \\ 9.0 \\ -12.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.15 \\ -2.12 \\ 0.18 \\ -1.44 \\ 2.51 \end{bmatrix} \text{ bar}$$

$$\underline{\Delta \mathbf{p}} = -\underline{\mathbf{R}} \underline{\dot{\mathbf{m}}}$$

Der Vektor der abhängigen Knotendrucke $\underline{\mathbf{p}}_a$ folgt aus Gleichung (27)

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1.15 \\ -2.12 \\ 0.18 \\ -1.44 \\ 2.51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.54 \\ -2.69 \\ -4.81 \\ -2.51 \\ -3.95 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{p}}_a = \underline{\mathbf{I}}^T \underline{\Delta \mathbf{p}}$$

Der unabhängige Druck beträgt Null d.h. $p_6 = 0$. Das Druckprofil erfordert im Anschluss eine Modifikation, um Mindestdrücke und geodätische Höhen zu berücksichtigen.

5.3 Gering vermaschtes Netz

Gering vermaschte Netze weisen weniger Maschen als Knoten auf. Abbildung 9 zeigt das Teilnetz A mit $k = 4$ Knoten und $m = 2$ Maschen. In dieses Netz treten zwei Masseströme ein und zwei Masseströme aus. Die Verteilung der Massenströme hängt von den Druckverlusten der Leitungen ab. Mit $m = 2$ Maschen erfordert die Berechnung des Druckprofils zwei interaktiv zu lösende Gleichungen.

Für die hydraulischen Berechnungen werden Stoffdaten und technologische Daten des vorigen Beispiels verwendet. Die Berechnung der Reynoldszahlen Re_i und Rohrreibwerte λ_i erfolgt analog zum „Strangnetz“.

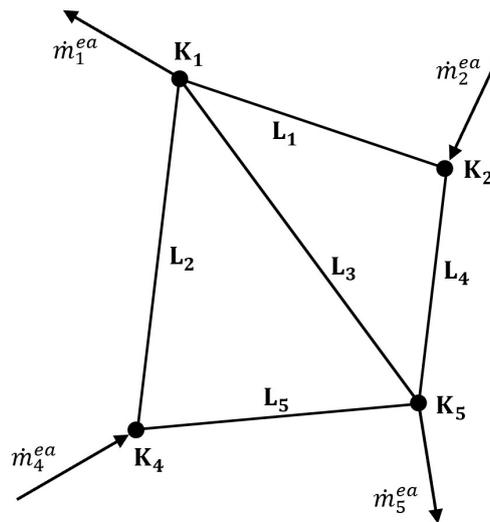


Abbildung 9: Das gering vermaschte Teilnetz A

Für das gering vermaschte Teilnetz A gilt der Auszug aus der Gleichung (87)

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_1^{ea} \\ \dot{m}_2^{ea} \\ \dot{m}_4^{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{\mathbf{m}}_a} + \underline{\underline{\mathbf{U}}} \underline{\dot{\mathbf{m}}_u} + \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\dot{\mathbf{m}}_u^{ea}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Mit dem Eingangsvektor $\underline{\mathbf{V}}$ erfolgt eine Vereinfachung

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20.0 \\ 24.0 \\ 32.0 \end{bmatrix} \frac{kg}{s} = \begin{bmatrix} -24.0 \\ -32.0 \\ 36.0 \end{bmatrix} \frac{kg}{s}$$

$$\underline{\mathbf{V}} = \underline{\underline{-\mathbf{I}}} \underline{\dot{\mathbf{m}}_u^{ea}}$$

Zur Berechnung der Startlösung für die Massenstromverteilung wird von identischen Strömungswiderständen R_i ausgegangen.

Mit der Lösungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ ergeben sich gemäß Gleichung 34

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = (\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \underline{\underline{\mathbf{U}}})^{-1}$$

die Startwerte der unabhängigen Masseströme $\underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_{u,0}$

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_3 \\ \dot{m}_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -24.0 \\ -32.0 \\ 36.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.0 \\ 18.0 \end{bmatrix} \frac{kg}{s}$$

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_{u,0} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \underline{\underline{\mathbf{V}}}$$

die Startwerte der abhängigen Masseströme $\underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_{a,0}$

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24.0 \\ -32.0 \\ 36.0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.0 \\ -14.0 \\ 4.0 \end{bmatrix} \frac{kg}{s}$$

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_{a,0} = \underline{\underline{\mathbf{V}}} - \underline{\underline{\mathbf{U}}} \underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_{u,0}$$

1. Iteration

Aus den gegebenen Stoffdaten und technologischen Daten ergeben sich die Reynoldszahlen der Rohrleitungen

$$\underline{\underline{\mathbf{Re}}}_0^T = [127324 \quad 178254 \quad 50930 \quad 178254 \quad 229183]$$

sowie die Rohrreibungswerte der Rohrleitungen

$$\underline{\underline{\lambda}}_0^T = [0.0217 \quad 0.0212 \quad 0.0239 \quad 0.0212 \quad 0.0209]$$

Die Strömungswiderstände in $[bar \cdot s \cdot kg^{-1}]$ und deren Ableitungen in $[bar \cdot s^2 \cdot kg^{-2}]$ nach Gleichung (35)

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{u,0} = \begin{bmatrix} 0.2413 & 0 \\ 0 & 0.3057 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{u,0} = \begin{bmatrix} 1.9353 & 0 \\ 0 & 1.9463 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{a,0} = \begin{bmatrix} 0.1766 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2413 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0780 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{a,0} = \begin{bmatrix} 1.9185 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9353 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8642 \end{bmatrix}$$

Aus den Gleichungen (36 und 37) folgt die Lösungsfunktion $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_0$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 3.3786 \\ 5.5030 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.0783 \\ 3.6904 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3003 \\ 1.8126 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}_0 = \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{u,0} \underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_{u,0} - \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{a,0} \underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_{a,0}$$

die unabhängigen Massenströme $\underline{\dot{m}}_{u,1}$

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \end{bmatrix}_{u,1} = \begin{bmatrix} 14.0 \\ 18.0 \end{bmatrix}_{u,0} - \begin{bmatrix} 0.9513 & 0.1453 \\ 0.1453 & 1.2074 \end{bmatrix}_0^{-1} \begin{bmatrix} 1.3003 \\ 1.8126 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 12.841 \\ 16.638 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{m}}_{u,1} = \underline{\dot{m}}_{u,0} - \underline{\mathbf{J}}_0^{-1} \underline{\mathbf{F}}_0$$

und die abhängigen Massenströme $\underline{\dot{m}}_{a,1}$

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \end{bmatrix}_{a,1} = \begin{bmatrix} -24.0 \\ -32.0 \\ 36.0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12.841 \\ 16.638 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.159 \\ -15.362 \\ 6.521 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{m}}_{a,1} = \underline{\mathbf{V}} - \underline{\mathbf{U}} \underline{\dot{m}}_{u,1}$$

2. Iteration

Die Reynoldszahlen der Rohrleitungen:

$$\underline{\mathbf{Re}}_1^T = [142079 \quad 195592 \quad 83023 \quad 163498 \quad 211845]$$

Die Rohrreibungswerte der Rohrleitungen:

$$\underline{\lambda}_1^T = [0.0215 \quad 0.0210 \quad 0.0226 \quad 0.0213 \quad 0.0209]$$

Die Strömungswiderstände und deren Ableitungen nach Gleichung (35)

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{u,1} = \begin{bmatrix} 0.2226 & 0 \\ 0 & 0.2838 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{u,1} = \begin{bmatrix} 1.9312 & 0 \\ 0 & 1.9430 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{a,1} = \begin{bmatrix} 0.1954 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2633 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1199 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{a,1} = \begin{bmatrix} 1.9242 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9395 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8942 \end{bmatrix}$$

Aus den Gleichungen (36 und 37) folgt die Lösungsfunktion $\underline{\mathbf{F}}_1$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 2.8587 \\ 4.7223 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.9622 \\ 4.8258 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1035 \\ -0.1035 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{F}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{u,1} \underline{\dot{m}}_{u,1} - \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{a,1} \underline{\dot{m}}_{a,1}$$

die unabhängigen Massenströme $\underline{\dot{m}}_{u,2}$

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \end{bmatrix}_{u,2} = \begin{bmatrix} 12.841 \\ 16.638 \end{bmatrix}_{u,1} - \begin{bmatrix} 1.0330 & 0.2270 \\ 0.2270 & 1.2891 \end{bmatrix}_0^{-1} \begin{bmatrix} -0.1035 \\ -0.1035 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 12.927 \\ 16.703 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{m}}_{u,2} = \underline{\dot{m}}_{u,1} - \underline{\mathbf{J}}_1^{-1} \underline{\mathbf{F}}_1$$

und die abhängigen Massenströme $\underline{\dot{m}}_{a,2}$

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \end{bmatrix}_{a,2} = \begin{bmatrix} -24.0 \\ -32.0 \\ 36.0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12.927 \\ 16.703 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.073 \\ -15.297 \\ 6.370 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{m}}_{a,2} = \underline{\mathbf{V}} - \underline{\mathbf{U}} \underline{\dot{m}}_{u,2}$$

3. Iteration

Die Reynoldszahlen der Rohrleitungen:

$$\underline{\mathbf{Re}}_2^T = [140986 \quad 194762 \quad 81100 \quad 164591 \quad 212675]$$

Die Rohrreibungswerte der Rohrleitungen:

$$\underline{\lambda}_2^T = [0.0215 \quad 0.0210 \quad 0.0226 \quad 0.0213 \quad 0.0209]$$

Die Strömungswiderstände und deren Ableitungen ergeben sich aus Gleichung (35)

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{u,2} = \begin{bmatrix} 0.2240 & 0 \\ 0 & 0.2849 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{u,2} = \begin{bmatrix} 1.9315 & 0 \\ 0 & 1.9432 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{a,2} = \begin{bmatrix} 0.1940 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2622 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1174 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{a,2} = \begin{bmatrix} 1.9238 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9393 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8928 \end{bmatrix}$$

Gemäß der Gleichungen (36 und 37) folgt die Lösungsfunktion $\underline{\mathbf{F}}_2$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 2.8958 \\ 4.7583 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.8961 \\ 4.7587 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0003 \\ -0.0003 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{F}}_2 = \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{u,2} \underline{\dot{m}}_{u,2} - \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{a,2} \underline{\dot{m}}_{a,2}$$

die unabhängigen Massenströme $\underline{\dot{m}}_{u,3}$

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \end{bmatrix}_{u,3} = \begin{bmatrix} 12.927 \\ 16.703 \end{bmatrix}_{u,2} - \begin{bmatrix} 1.0281 & 0.2222 \\ 0.2222 & 1.2842 \end{bmatrix}_2^{-1} \begin{bmatrix} -0.0003 \\ -0.0003 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 12.927 \\ 16.704 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{m}}_{u,3} = \underline{\dot{m}}_{u,2} - \underline{\underline{\mathbf{J}}}_2^{-1} \underline{\mathbf{F}}_2$$

und die abhängigen Massenströme $\underline{\dot{m}}_{a,3}$

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \end{bmatrix}_{a,3} = \begin{bmatrix} -24.0 \\ -32.0 \\ 36.0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12.927 \\ 16.704 \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} -11.073 \\ -15.296 \\ 6.369 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{m}}_{a,3} = \underline{\mathbf{V}} - \underline{\underline{\mathbf{U}}} \underline{\dot{m}}_{u,3}$$

Letzte Iteration

Die ersten Berechnungsschritte erfolgen analog zu den vorigen Iterationen. Die Werte der Lösungsfunktion $\underline{\mathbf{F}}_3$, berechnet mit den Massenströmen der 3. Iteration zeigen das erfolgreiche Ende der Berechnung. Die Berechnung der Massenstromverteilung des aus $k = 4$ Knoten und $l = 5$ Leitungen bestehenden Netzes ist mit Lösung von $m = 2$ nichtlinearen Gleichungen nach $z = 3$ Iterationen erfolgreich abgeschlossen!

$$\underline{\mathbf{F}}_3 = \begin{bmatrix} 6.47 \cdot 10^{-8} \\ 5.79 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix}$$

Druckprofil

Die Kopplungsmatrix sowie die Inverse weisen den Rang $r = 3$ auf. Durch Annullieren der Gleichung für den Knoten K_5 ist dessen Druck gleich Null d.h. $p_5 = 0$. Für die abhängigen Knotendrucke $\underline{\mathbf{p}}_a$ gilt nach Gleichung (40)

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.194 & 0 & 0 \\ 0 & 0.262 & 0 \\ 0 & 0 & 0.117 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11.07 \\ -15.30 \\ 6.37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.748 \\ 2.896 \\ 4.758 \end{bmatrix}$$
$$\underline{\mathbf{p}}_a = -\underline{\mathbf{I}}^T \underline{\mathbf{R}}_a \underline{\mathbf{m}}_a$$

Die ermittelten Drücke sind zunächst unrealistisch und werden mit einer nachfolgenden Berechnung korrigiert, um die korrekte Einbindung von geodätischen Höhen und Mindestdrücken zu gewährleisten.

5.4 Stark vermaschtes Netz

Die Anzahl der Maschen in einem stark vermaschten Netze entspricht mindestens der Knotenzahl d.h. $m \geq k$. Die Abbildung 10 zeigt das Teilnetz B mit $k = 3$ Knoten und $m = 3$ Maschen. In dieses Netz treten zwei Masseströme ein und zwei Masseströme aus. Die Verteilung der Massenströme hängt von den Druckverlusten der Leitungen ab. Die Berechnung des Druckprofils eines Netzes mit $k = 3$ Knoten erfordert $k - 1 = 2$ nichtlineare iterativ zu lösende Gleichungen.

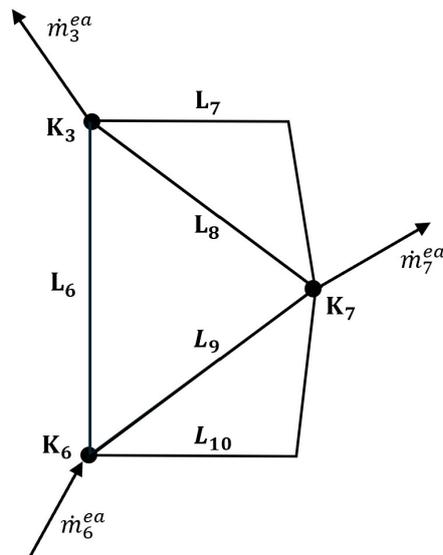


Abbildung 10: Stark vermaschtes Netz mit drei Knoten und drei Maschen

Der Knotensatz für das Teilnetz B formuliert die Massenbilanzen für die $k = 3$ Knoten des Netzes.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_6 \\ \dot{m}_7 \\ \dot{m}_8 \\ \dot{m}_9 \\ \dot{m}_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_3^{ea} \\ \dot{m}_7^{ea} \\ \dot{m}_6^{ea} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} \quad \underline{\underline{\mathbf{m}}} \quad + \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad \underline{\underline{\mathbf{m}}^{ea}} \quad = \quad \underline{\underline{\mathbf{m}}}$$

Die zur hydraulischen Berechnung erforderlichen Stoffdaten und technologischen Daten entsprechen denen des Beispiels „Strangnetz“. Dies gilt ebenfalls für die Berechnung von Reynoldszahlen Re_i und Rohrreibwerte λ_i .

Die Ermittlung der Startwerte für die Massenstromverteilung geht von identischen Strömungswiderständen sämtlicher Rohrleitungen aus. Mit der Lösungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ gemäß Gleichung (42)

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = (\underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T)^{-1}$$

erfolgt die Ermittlung der Startverteilung für die Massenströme $\underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_0$

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_6 \\ \dot{m}_7 \\ \dot{m}_8 \\ \dot{m}_9 \\ \dot{m}_{10} \end{bmatrix}_0 = - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -16.0 \\ 40.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.0 \\ -1.0 \\ -1.0 \\ 13.0 \\ 13.0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_0 = -\underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}^{ea}$$

1. Iteration

Aus den ermittelten Startwerten der Massenströme ergeben sich die Reynoldszahlen der Rohrleitungen

$$\underline{\underline{\mathbf{Re}}}_0^T = [178254 \quad 12732 \quad 12732 \quad 165521 \quad 165521]$$

Die Rohrreibungswerte der Rohrleitungen gemäß Gleichung (11)

$$\underline{\underline{\lambda}}_0^T = [0.0212 \quad 0.0307 \quad 0.0307 \quad 0.0213 \quad 0.0213]$$

Die Strömungswiderstände (1) für $l = 5$ Leitungen sowie deren Ableitungen (12) als Diagonalmatrizen

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_0 = \begin{bmatrix} 0.2413 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0249 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0249 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2252 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2252 \end{bmatrix} \frac{\text{bar s}}{\text{kg}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_0 = \begin{bmatrix} 1.8609 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.7556 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.7556 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.8573 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8573 \end{bmatrix}$$

Mit Gleichung (46) erfolgt die Berechnung der Jacobimatrix $\underline{\underline{\mathbf{J}}}_0$

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}}_0 = \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_0^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}}_0^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T = \begin{bmatrix} 47.917 & -2.227 \\ -2.227 & 7.009 \end{bmatrix}$$

Die Berechnung des Zwischenresultats $\underline{\dot{\mathbf{m}}}_0^*$ erfolgt gemäß Lösungsgleichung (46)

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_3^* \\ \dot{m}_7^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.463 & 0.430 & 0.430 & 0 & 0 \\ -0.463 & 0 & 0 & 0.462 & 0.462 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14.0 \\ -1.0 \\ -1.0 \\ 13.0 \\ 13.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.337 \\ -18.478 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{\mathbf{m}}}_0^* = \underline{\mathbf{K}} \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{A}}_0^{-1} \right) \underline{\dot{\mathbf{m}}}_0$$

ebenso die Berechnung des Vektors der abhängigen Drücke $\underline{\mathbf{p}}_a$

$$\begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47.917 & -2.227 \\ -2.227 & 7.009 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 7.337 \\ -18.478 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16.0 \\ 40.0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -0.039 \\ 3.059 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{a,1} = \underline{\mathbf{J}}_0^{-1} \left(\underline{\dot{\mathbf{m}}}_0^* + \underline{\dot{\mathbf{m}}}^{ea} \right)$$

und die Berechnung des Massestromvektors $\underline{\dot{\mathbf{m}}}_1$

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_6 \\ \dot{m}_7 \\ \dot{m}_8 \\ \dot{m}_9 \\ \dot{m}_{10} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} -6.476 \\ -0.430 \\ -0.430 \\ 6.001 \\ 6.001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2.227 & 2.227 \\ -22.876 & 0 \\ -22.876 & 0 \\ 0 & -2.391 \\ 0 & -2.391 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.039 \\ 3.059 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13.373 \\ -1.313 \\ -1.313 \\ 13.313 \\ 13.313 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{\mathbf{m}}}_1 = \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{A}}_0^{-1} \right) \underline{\dot{\mathbf{m}}}_0^* - \underline{\mathbf{A}}_0^{-1} \underline{\mathbf{R}}_0^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{p}}_{a,1}$$

2. Iteration

Aus den ermittelten Startwerten der Massenströme ergeben sich die Reynoldszahlen der Rohrleitungen

$$\underline{\mathbf{Re}}_1^T = [170275 \quad 16722 \quad 16722 \quad 169511 \quad 169511]$$

Die Rohrreibungswerte der Rohrleitungen

$$\underline{\lambda}_1^T = [0.0212 \quad 0.0289 \quad 0.0289 \quad 0.0212 \quad 0.0212]$$

Die Strömungswiderstände (1) für $l = 5$ Leitungen sowie deren Ableitungen (12) als Diagonalmatrizen

$$\underline{\mathbf{R}}_1 = \begin{bmatrix} 0.2312 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0309 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0309 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2302 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2302 \end{bmatrix} \frac{\text{bar } s}{kg}$$

$$\underline{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 1.8609 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.7556 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.7556 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.8573 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8573 \end{bmatrix}$$

Mit Gleichung (46) erfolgt die Berechnung der Jacobimatrix $\underline{\underline{\mathbf{J}}}_1$

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_1^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}}_1^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T = \begin{bmatrix} 39.168 & -2.324 \\ -2.324 & 7.001 \end{bmatrix}$$

Die Berechnung des Zwischenresultats $\underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_1^*$ erfolgt gemäß Lösungsgleichung (46)

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_3^* \\ \dot{m}_7^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.463 & 0.430 & 0.430 & 0 & 0 \\ -0.463 & 0 & 0 & 0.462 & 0.462 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -13.394 \\ -1.303 \\ -1.303 \\ 13.303 \\ 13.303 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.317 \\ -18.477 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_1^* = \underline{\underline{\mathbf{K}}} \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}}_1^{-1} \right) \underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_1$$

ebenso die Berechnung des Vektors der abhängigen Drücke $\underline{\underline{\mathbf{p}}}_{a,2}$

$$\begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39.168 & -2.324 \\ -2.324 & 7.001 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 7.317 \\ -18.477 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16.0 \\ 40.0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -0.040 \\ 3.061 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{p}}}_{a,2} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}_1^{-1} (\underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_1^* + \underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}^{ea})$$

und die erneute Berechnung des Massestromvektors $\underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_2$ ergibt

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_6 \\ \dot{m}_7 \\ \dot{m}_8 \\ \dot{m}_9 \\ \dot{m}_{10} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -6.187 \\ -0.565 \\ -0.565 \\ 6.145 \\ 6.145 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2.324 & 2.324 \\ -18.422 & 0 \\ -18.422 & 0 \\ 0 & -2.338 \\ 0 & -2.338 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.040 \\ 3.061 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13.394 \\ -1.303 \\ -1.303 \\ 13.303 \\ 13.303 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_2 = \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}}_n^{-1} \right) \underline{\underline{\dot{\mathbf{m}}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{A}}}_1^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}}_1^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \underline{\underline{\mathbf{p}}}_{a,2}$$

3. Iteration

Aus den ermittelten Massenströmen ergeben sich die Reynoldszahlen der Rohrleitungen

$$\underline{\underline{\mathbf{Re}}}_2^T = [170537 \quad 16591 \quad 16591 \quad 169379 \quad 169379]$$

Die Rohrreibungswerte der Rohrleitungen

$$\underline{\underline{\lambda}}_2^T = [0.0212 \quad 0.0290 \quad 0.0290 \quad 0.0212 \quad 0.0212]$$

Die Strömungswiderstände (1) für $l = 5$ Leitungen sowie deren Ableitungen (12) als

Diagonalmatrizen

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_2 = \begin{bmatrix} 0.2315 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0307 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0307 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2301 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2301 \end{bmatrix} \frac{\text{bar s}}{\text{kg}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_2 = \begin{bmatrix} 1.8609 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.7556 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.7556 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.8573 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8573 \end{bmatrix}$$

Mit Gleichung (46) erfolgt die Berechnung der Jacobimatrix $\underline{\underline{\mathbf{J}}}_2$

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}}_2 = \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_2^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}}_2^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T = \begin{bmatrix} 39.396 & -2.321 \\ -2.321 & 7.011 \end{bmatrix}$$

Die Berechnung des Zwischenresultats $\underline{\underline{\mathbf{m}}}_2^*$ erfolgt gemäß Lösungsgleichung (46)

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_3^* \\ \dot{m}_7^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.463 & 0.430 & 0.430 & 0 & 0 \\ -0.463 & 0 & 0 & 0.462 & 0.462 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -13.394 \\ -1.303 \\ -1.303 \\ 13.303 \\ 13.303 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.318 \\ -18.477 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{m}}}_2^* = \underline{\underline{\mathbf{K}}} \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}}_2^{-1} \right) \underline{\underline{\mathbf{m}}}_2$$

ebenso die Berechnung des Vektors der abhängigen Drücke $\underline{\underline{\mathbf{p}}}_{a,3}$

$$\begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39.168 & -2.324 \\ -2.324 & 7.001 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 7.317 \\ -18.477 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16.0 \\ 40.0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -0.040 \\ 3.061 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{p}}}_{a,3} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}_2^{-1} (\underline{\underline{\mathbf{m}}}_2^* + \underline{\underline{\mathbf{m}}}^{ea})$$

und die Berechnung des Massestromvektors $\underline{\underline{\mathbf{m}}}_3$

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_6 \\ \dot{m}_7 \\ \dot{m}_8 \\ \dot{m}_9 \\ \dot{m}_{10} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} -6.187 \\ -0.565 \\ -0.565 \\ 6.145 \\ 6.145 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2.324 & 2.324 \\ -18.422 & 0 \\ -18.422 & 0 \\ 0 & -2.338 \\ 0 & -2.338 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.040 \\ 3.061 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13.394 \\ -1.303 \\ -1.303 \\ 13.303 \\ 13.303 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{m}}}_3 = \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}}_2^{-1} \right) \underline{\underline{\mathbf{m}}}_2 - \underline{\underline{\mathbf{A}}}_2^{-1} \underline{\underline{\mathbf{R}}}_2^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \underline{\underline{\mathbf{p}}}_{a,3}$$

Nach drei Iterationen gibt es keine Veränderung bei Massenstromverteilung und Druckprofil! Damit ist das Druckprofil des Netzes, bestehend aus $k = 3$ Knoten und $l = 5$ Leitungen mit zwei nichtlinearen Gleichungen nach $z = 3$ Iterationen gelöst.

Der vorläufige Druck des Knotens K_6 beträgt auf Grund des Ranges der Lösungsmatrix und damit dem Wegfall einer Gleichung Null d.h. $p_6 = 0$. Die ermittelten Drücke erfordern eine Korrektur, um Mindestdrücke und geodätische Höhen physikalisch korrekt einzubinden.

5.5 Ermittlung des statischen Druckprofils

Die abhängigen Drücke \underline{p}_a erfordern zur Berücksichtigung von Mindestdrücken und geodätischen Höhen die Addition des Korrekturdruckes p_{Korr} . Für das Beispiel „Strangnetz“ gelten die zunächst ermittelten Drücke \underline{p} (inklusive p_6) sowie die geodätischen Höhen \underline{h}

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} -1.54 \\ -2.69 \\ -4.81 \\ -2.51 \\ -3.95 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ bar} \quad \underline{h} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 15 \\ 15 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ m}$$

Für die Pseudodrücke $\underline{\delta}$ folgt mit Gleichung (48)

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.54 \\ -2.69 \\ -4.81 \\ -2.51 \\ -3.95 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\rho g}{10^5} \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 15 \\ 15 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.04 \\ -3.69 \\ -6.31 \\ -4.10 \\ -4.95 \\ -0.50 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\delta} = \underline{p} - \rho g \underline{h}$$

Aus Mindestdruck $p_{Mind} = 1.5 \text{ bar}$ und dem minimalen Pseudodruck $\delta_{Min} = -6.31 \text{ bar}$ des Knoten K_3 folgt aus Gleichung (49) der Korrekturdruck

$$p_{Korr} = 1.50 \text{ bar} + 6.31 \text{ bar} = 7.81 \text{ bar}$$

Der statische Druck \underline{p}_s ergibt sich aus Pseudodruck $\underline{\delta}$ durch Addition des Korrekturdruckes p_{Korr} . Das endgültige Resultat mit Gleichung (50) lautet

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.04 \\ -3.69 \\ -6.31 \\ -4.10 \\ -4.95 \\ -0.50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 7.81 \text{ bar} = \begin{bmatrix} 6.77 \\ 4.12 \\ 1.50 \\ 3.71 \\ 2.86 \\ 7.31 \end{bmatrix} \text{ bar}$$

$$\underline{p}_s = \underline{\delta} + \underline{1} p_{Korr}$$

Der Vektor des statischen Drucks \underline{p}_s weist am Knoten K_3 exakt den Mindestdruck auf und hält sämtliche Druckdifferenzen zwischen den Knoten ein.

5.6 Stationäres und instationäres Temperaturprofil

Abbildung 11 zeigt ein Netz mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen

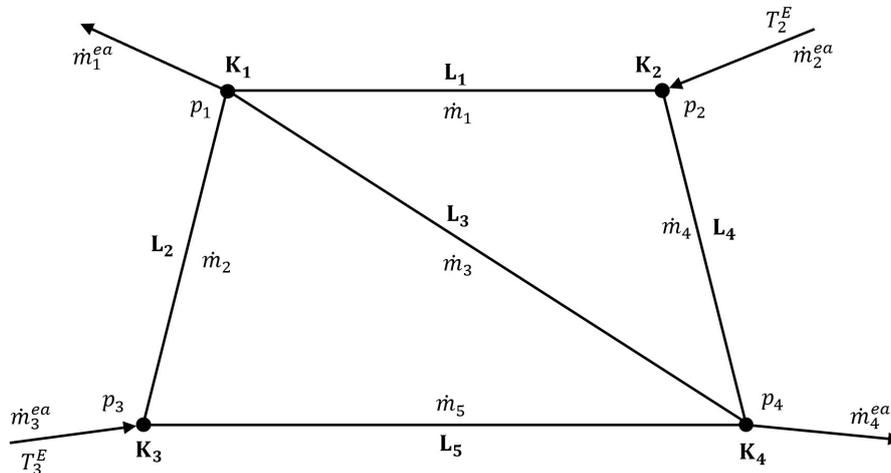


Abbildung 11: Netzwerk mit vier Knoten und fünf verbindenden Leitungen

Die Höhe der Drücke des Beispiels „Schwach vermaschtes Netz“ bestimmen die Reihenfolge der Berechnung

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7477 \\ 4.8959 \\ 6.7583 \\ 2.0 \end{bmatrix} \text{ bar}$$

Die Massenströme der Leitungen

$$\underline{\dot{m}} = \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.073 \\ -15.296 \\ 6.369 \\ 12.927 \\ 16.704 \end{bmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Der Vektor \underline{V} beschreibt mit den Koeffizienten v_1 und v_2 die Mischung im Knoten K_1 , mit den Knoten v_3, v_4 und v_5 die Mischung im Knoten K_3

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{m}_1 / (\dot{m}_1 + \dot{m}_2) \\ \dot{m}_2 / (\dot{m}_1 + \dot{m}_2) \\ \dot{m}_3 / (\dot{m}_3 + \dot{m}_4 + \dot{m}_5) \\ \dot{m}_4 / (\dot{m}_3 + \dot{m}_4 + \dot{m}_5) \\ \dot{m}_5 / (\dot{m}_3 + \dot{m}_4 + \dot{m}_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.420 \\ 0.580 \\ 0.177 \\ 0.359 \\ 0.464 \end{bmatrix}$$

Für die dimensionslosen Transferzahlen $\Theta = \exp\left(-\frac{kA}{\dot{m}c}\right) = \exp\left(-\frac{k\pi dl}{\dot{m}c}\right)$ ergibt sich

$$\underline{\Theta} = \begin{bmatrix} 0.967 \\ 0.976 \\ 0.943 \\ 0.971 \\ 0.978 \end{bmatrix}$$

Mit der Transfermatrix $\underline{\Theta}$ und den Temperaturen ($T_{k2}^E = 120^\circ C$, $T_{k3}^E = 120^\circ C$ und $T_u = 10^\circ C$) ergeben sich gemäß Gleichung (64) die reduzierten Knotentemperaturen

$$\begin{bmatrix} \vartheta_{k1} \\ \vartheta_{k2} \\ \vartheta_{k3} \\ \vartheta_{k4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.406 & 0.566 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.068 + 0.349 & 0.095 + 0.454 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 110 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95.6 \\ 110.0 \\ 90.0 \\ 95.2 \end{bmatrix}$$

Die technologischen Temperaturen ergeben sich aus den reduzierten Temperaturen durch Addition der Umgebungstemperatur

$$\begin{bmatrix} T_{k1} \\ T_{k2} \\ T_{k3} \\ T_{k4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95.6 \\ 110.0 \\ 90.0 \\ 95.2 \end{bmatrix} ^\circ C + \begin{bmatrix} 10.0 \\ 10.0 \\ 10.0 \\ 10.0 \end{bmatrix} ^\circ C = \begin{bmatrix} 105.6 \\ 120.0 \\ 100.0 \\ 105.2 \end{bmatrix} ^\circ C$$

Veränderte Eingangstemperaturen haben keinen Einfluss auf die Transfermatrix $\underline{\Theta}$. Dadurch stellen die Koeffizienten der Transfermatrix $\underline{\Theta}$ relative Temperaturänderungen dar. Nur geänderte Massenströme erfordern eine „Neuberechnung“.

Dynamische Simulation

Die Übertragungsmatrix $\underline{\mathbf{F}}$ nach Gleichung (85)

$$\begin{bmatrix} \theta_{k1} \\ \theta_{k2} \\ \theta_{k3} \\ \theta_{k4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 F_{L1} & v_2 F_{L2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ v_1 F_{L1} v_3 F_{L3} + v_4 F_{L4} & v_2 F_{L2} v_3 F_{L3} + v_5 F_{L5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2^E \\ \theta_3^E \end{bmatrix}$$

Gemäß obiger Gleichung lautet beispielsweise die Übertragungsfunktion von der Eingangstemperatur des Knoten K_2 zur Austrittstemperatur des Knoten K_4

$$\theta_{k4} = (v_1 F_{L1} v_3 F_{L3} + v_4 F_{L4}) \theta_2^E$$

Die Übertragungsfunktion mit $n = 100$ Rohrzellen für jeweils beide Rohrleitungen L_2 und L_3

$$\theta_{k4} = \left(\frac{v_1 v_3}{(1 + N_1 + s\tau_1)^{100} (1 + N_3 + s\tau_3)^{100}} + \frac{v_4}{(1 + N_4 + s\tau_4)^{100}} \right) \theta_2^E$$

Die Rücktransformation ergäbe äußerst umfangreiche Terme. Deshalb werden in diesem Beispiel die pT_{100} -Terme gegen pT_1 -Terme mit einer Totzeit substituiert.

$$\theta_{k4} = \frac{v_1 v_3 e^{-s\tau_{t1}} e^{-s\tau_{t3}}}{(1 + N_1 + s\tau_1)(1 + N_3 + s\tau_3)} \theta_2^E + \frac{v_4 e^{-s\tau_{t4}}}{(1 + N_4 + s\tau_4)} \theta_2^E$$

Durch Rücktransformation entsteht die Änderung der Austrittstemperatur des Knoten K_4 als Funktion der Zeit

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta_{k4} = & v_1 \Theta_1 v_3 \Theta_3 \left(1 - \frac{\tau_1 \Theta_1 e^{-\frac{t-\tau_{t1}-\tau_{t2}}{\tau_1 \Theta_1}} - \tau_3 \Theta_3 e^{-\frac{t-\tau_{t1}-\tau_{t2}}{\tau_3 \Theta_3}}}{\tau_1 \Theta_1 - \tau_3 \Theta_3} \right) \Delta\vartheta_2^E \\ & + v_4 \Theta_4 \left(1 - e^{-\frac{(1+N_4)t-\tau_{t4}}{\tau_4}} \right) \Delta\vartheta_2^E \end{aligned}$$

Die analytischen Terme nach der Rücktransformation sind meist sehr komplex und kaum übersichtlich darstellbar. Deshalb ist es günstig die Rücktransformation auf numerischem Wege durchzuführen. Entsprechende Algorithmen sind nicht schwierig zu programmieren.

6 Zusammenfassung

Der vorliegende Aufsatz umfasst mathematische Methoden zur konkreten Berechnung der hydraulischen und thermischen Eigenschaften von Fernwärmenetzen. Bei den vorgestellten Modellen steht der Systemgedanke im Vordergrund. Die anerkannten Grundlagen der Strömungs- und Wärmetechnik finden in den Details Berücksichtigung.

Bei der gleichungsorientierten Simulation für die hydraulischen Netzeigenschaften, bei welcher ein abstraktes formal generiertes Gleichungssystem simultan gelöst wird, treten die Systemeigenschaften des Wärmenetzes besonders deutlich hervor. Die topologisch orientierte Simulation der thermischen Eigenschaften eines Wärmenetzes funktioniert sehr anschaulich und benötigt vor allem keine Iterationen.

Die vorgestellten Modelle sind für umfangreiche Wärmenetze geeignet. Bei Verwendung von Softwarebausteinen ist ein überschaubarer Programmieraufwand erforderlich. Die Modelle sind als Bausteine für Planung, Dimensionierung und Analyse von Verteilungsnetzen geeignet. Darüber hinaus sind die Modelle für Projektanten und Betreiber in Richtung Optimierung bis hin zum Einsatz künstlicher Intelligenz interessant.

7 Formelzeichen

7.1 Skalare

a	... Zählindex	... —
a	... Ableitungsfaktor	... bar s kg^{-1}
c	... spezifische Wärmekapazität	... $\text{kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}$
d	... Durchmesser Rohrleitung	... m
Δp	... Druckdifferenz, Druckabfall	... bar
δ	... Pseudodruck	... bar
e	... Zählindex	... —
F	... Strömungsquerschnitt	... m^2
F	... Übertragungsfunktion	... —
Φ	... Betriebscharakteristik	... —
g	... Erdbeschleunigung	... $m s^{-2}$
k	... Wärmedurchgangskoeffizient	... $\text{kW m}^{-2}\text{K}^{-1}$
k	... relative Wandrauhigkeit	... —
k	... Anzahl Knoten	... —
l	... Länge der Rohrleitung	... m
l	... Anzahl Leitungen	... —
λ	... Rohrreibungszahl	... —
m	... Anzahl Maschen	... —
m	... Masse	... kg
\dot{m}	... Massestrom	... kg s^{-1}
n	... Zählindex	... —
n	... Anzahl Netze	... —
p	... Druck	... bar
\dot{Q}	... Wärmestrom	... kW
R	... Strömungswiderstand	... bar s kg^{-1}
Re	... Reynoldszahl	... —
r	... Zählindex	... —
r	... Rauhtiefe	... m
ρ	... Dichte	... kg m^{-3}
s	... komplexe Variable	... s^{-1}, h^{-1}
t	... Zeit	... s, h
τ	... Zeitkonstante	... s, h
θ	... laplace – transformierte Temperatur	... —
ϑ	... reduzierte Temperatur	... —
Θ	... Transferzahl	... —
t	... Zeit	... s, h
T	... Temperatur	... $^{\circ}\text{C}, K$
v	... Mischungskoeffizient	... —
z	... Anzahl Zeitschritte bzw. Zustandsgrößen	... —

7.2 Vektoren

$\underline{\dot{m}}$... Massestromvektor	... $kg\ s^{-1}$
$\underline{\vartheta}$... Vektor der reduzierten Temperaturen	... –
\underline{T}	... Temperaturvektor	... $^{\circ}C, K$
$\underline{\Theta}$... Transfervektor	... –
$\underline{\theta}$... Vektor der laplace-transformierten Temperaturen	... kW
\underline{V}	... Anschlussvektor	... $kg\ s^{-1}$
\underline{V}	... Vektor der Mischungskoeffizienten	... –
$\underline{0}$... Nullvektor	... –

7.3 Matrizen

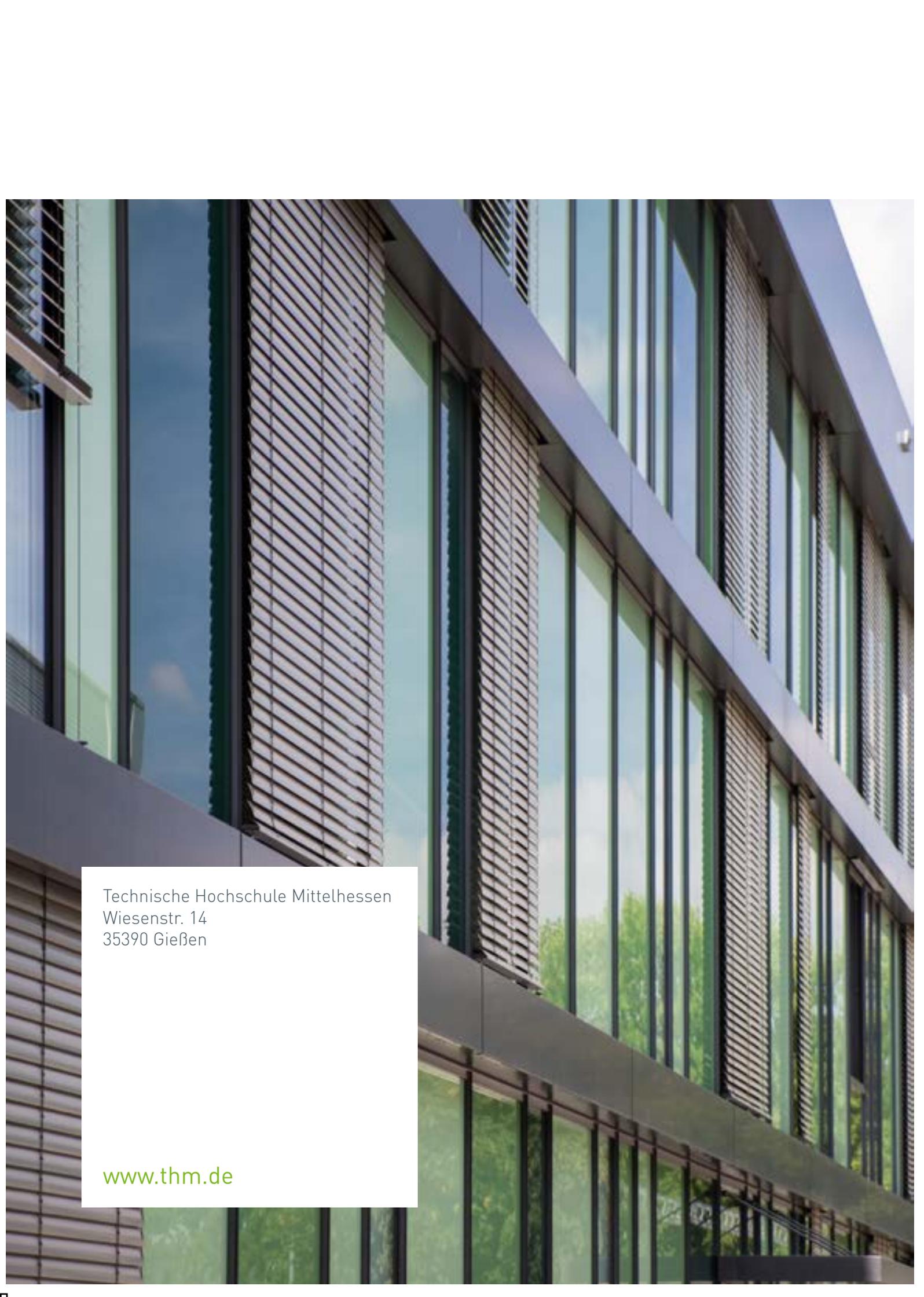
$\underline{\underline{A}}$... Ableitungsmatrix	... $bar\ s^2kg^{-2}$
$\underline{\underline{B}}$... Bilanzmatrix	... –
$\underline{\underline{E}}$... Einheitsmatrix	... –
$\underline{\underline{F}}$... Übertragungsmatrix	... –
$\underline{\underline{I}}$... Inverse Matrix	... –
$\underline{\underline{J}}$... Jacobi – Matrix	... –
$\underline{\underline{K}}$... Kopplungsmatrix	... –
$\underline{\underline{N}}$... Übertragungsmatrix	... –
$\underline{\underline{R}}$... Widerstandsmatrix	... $bar\ s\ kg^{-1}$
$\underline{\underline{U}}$... Unabhängigkeitsmatrix	... –
$\underline{\underline{\Theta}}$... Transfermatrix	... –
$\underline{\underline{0}}$... Nullmatrix	... –

7.4 Indizes

\square_a	... abhängig
\square^a	... Ausgang
\square^e	... Eingang
\square_{Korr}	... Korrektur
\square_l	... Leitung, Rohrleitung
\square_{lam}	... laminar
\square_{Min}	... Minimum
\square_{Mind}	... Mindest...
\square_s	... stationär
\square_{trb}	... turbulent
\square_u	... unabhängig
\square_u	... Umgebung

8 Literatur

- [1] Weidlich, I.: "Wärmetechnische Auslegung von Fernwärme- und Heißwasserleitungen"; Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg; 2022
- [2] Planungshandbuch Fernwärme
EnergieSchweiz, Bundesamt für Energie BFE; 2017
- [3] Strelow, O.: „Viele Wege führen nach Rom ... Ansätze zur Netzberechnung“
19. Tagung "Verfahrenstechnik - Umweltschutz"; Köthen 2020
- [4] Strelow, O.: „Allgemeines Berechnungsmodell für elektrische Netze“
THM-Hochschulzeitschriften Band 3; 2019
- [5] Strelow, O.: „Optimierung von Erdgasversorgungsnetzen“
VDI-Tagung „Optimierung in der Energieversorgung“; Stuttgart 1994
- [6] Vorlesungsreihe und Lehrbriefe „Systemverfahrentechnik“
Technische Hochschule Köthen 1990
- [7] Strelow, O.: „Die Allgemeine Theorie der technischen Netze“
Vorträge und Manuskripte 2002 - 2022

A photograph of a modern building facade featuring large glass windows and metal panels. The glass reflects the sky and surrounding greenery. The metal panels have a textured, grid-like pattern. The building is viewed from a low angle, looking up.

Technische Hochschule Mittelhessen
Wiesenstr. 14
35390 Gießen

www.thm.de